



Arbres, laminations et groupes libres

Arnaud Hilion

► To cite this version:

Arnaud Hilion. Arbres, laminations et groupes libres. Théorie des groupes [math.GR]. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2011. <tel-01218369>

HAL Id: tel-01218369

<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01218369>

Submitted on 23 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE — AIX-MARSEILLE III

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade

D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Arnaud Hilion

Arbres, laminations et groupes libres

Soutenue le vendredi 2 décembre 2011 devant le jury composé de :

| | |
|-----------------------------|---|
| Goulmira Arzhantseva | Professeur, ESI, Université de Vienne |
| Damien Gaboriau | Directeur de recherche au CNRS, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon |
| Jean-Marc Gambaudo | Directeur de recherche au CNRS, LJAD, Université Nice Sophia Antipolis |
| Gilbert Levitt | Professeur, LMNO, Université de Caen |
| Martin Lustig | Professeur, LATP, Université Aix-Marseille III |
| Hamish Short | Professeur, LATP, Université Aix-Marseille I |

Après avis des rapporteurs :

| | |
|-----------------------|---|
| Martin Bridson | Professeur, Mathematical Institute, Université d'Oxford |
| Cornelia Druţu | Professeur, Mathematical Institute, Université d'Oxford |
| Ilya Kapovich | Professeur, Université de l'Illinois à Urbana-Champaign |
| Yair Minsky | Professeur, Université de Yale |
| Hamish Short | Professeur, LATP, Université Aix-Marseille I |

Arbres, laminations et groupes libres

Arnaud Hilion

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord à Martin Bridson, Cornélia Druţu, Ilya Kapovich, Yair Minsky et Hamish Short qui ont pris le temps d'écrire un rapport sur mon travail. Je remercie également Goulmira Arzhantseva, Damien Gaboriau, Jean-Marc Gambaudo, Gilbert Levitt qui ont fait le déplacement pour siéger dans mon jury, ainsi que Martin Lustig et Hamish Short.

Je souhaite aussi remercier mes différents co-auteurs ¹ : Anne, François, Gilbert, Julien, Nicolas, Martin, Patrick, Pierre, Maxime, Rémi, Thierry, Valérie, Xavier. Ils m'ont beaucoup apporté mathématiquement, mais surtout, et c'est une chance, j'ai pris plaisir à travailler avec chacun d'eux.

Mon travail de ces dernières années a largement bénéficié de l'environnement mathématique marseillais. J'ai notamment beaucoup appris de mes collègues qui gravitent autour de notre séminaire hebdomadaire du vendredi, le *Teich*, et probablement que le barycentre de mes travaux de recherche en a été déplacé ².

Je dois aussi beaucoup à mon laboratoire, le LATP. Je veux notamment remercier mes collègues de Saint-Jérôme (qui sont ceux que je croise le plus souvent) pour l'ambiance chaleureuse qui règne dans le bâtiment Henri Poincaré, et les secrétaires du LATP dont l'efficacité, et la gentillesse, m'ont souvent touché.

Merci enfin à Sonia, pour tout ce qu'elle m'apporte.

¹dans une acception suffisamment large pour ne pas nécessairement impliquer l'existence d'un article en commun...

²la faute aux surfaces plates, à la théorie ergodique pas triste, à la combinatoire pythéasséenne, etc.

Publications de l'auteur

Thèse

- [0] *Dynamique des automorphismes des groupes libres*, sous la direction de Gilbert Levitt – soutenue en décembre 2004 à Toulouse.

Publications

- [1] *Fractal representation of the attractive lamination of an automorphism of the free group*, avec Pierre Arnoux, Valérie Berthé et Anne Siegel – Annales de l'Institut Fourier 56 (2006), n° 7, p 2161-2212.
- [2] *Lamination duale à un arbre réel* – Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, 24 (2006), p 9-21
- [3] *Non-unique ergodicity, observers' topology and the dual lamination for \mathbb{R} -trees*, avec Thierry Coulbois et Martin Lustig – Illinois Journal of Math. 51 (2007), p 897-911.
- [4] *On the maximal subgroups of automorphisms of a free group which fix a point of the boundary* – International Mathematics Research Notices, rnm066-21, 2007 (2007).
- [5] *R-trees and laminations for free groups I : Algebraic laminations*, avec Thierry Coulbois et Martin Lustig – Journal of the London Math. Soc. 78 (2008), n° 3, p 723-736.

- [6] *R-trees and laminations for free groups II : The dual lamination of an R-tree*, avec Thierry Coulbois et Martin Lustig – Journal of the London Math. Soc. 78 (2008), n° 3, p 737-754.
- [7] *R-trees and laminations for free groups III : Currents and dual R-tree metrics*, avec Thierry Coulbois et Martin Lustig – Journal of the London Math. Soc. 78 (2008), n° 3, p 755-766.
- [8] *R-trees, dual laminations, and compact systems of partial isometries*, avec Thierry Coulbois et Martin Lustig – Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society 147 (2009), n° 2, p 345-368.

Prépublications

- [9] *Rips Induction : Index of the dual lamination of an R-tree*, avec Thierry Coulbois, 50p – disponible sur arXiv :1002.0972.
- [10] *Geometric realizations of substitutive tilings*, avec Nicolas Bédaride, 20p – disponible sur arXiv :1101.3905.
- [11] *Free group automorphisms with parabolic boundary orbits*, 16p – disponible sur arXiv :1103.6047.
- [12] *Indecomposable F_N -trees and minimal laminations*, avec Thierry Coulbois et Patrick Reynolds, 27p – disponible sur arXiv :1110.3506.

Article en voie de finalisation

- [13] *Growth and order of automorphisms of free groups and free Burnside groups*, avec Rémi Coulon.

Sommaire

| | |
|---|----------|
| 1 Arbres, courants et laminations | 1 |
| 1 Le groupe libre et son bord | 1 |
| 2 Actions par isométries du groupe libre sur un arbre réel | 2 |
| 2.1 Arbres réels | 2 |
| 2.2 Outre-espace | 2 |
| 3 Laminations et courants | 3 |
| 3.1 Le point de vue “intrinsèque” | 4 |
| 3.2 Laminations symboliques et courants symboliques | 4 |
| 3.3 Langages laminaires et fonctions de Kolmogorov | 5 |
| 3.4 Relation entre les trois points de vue | 6 |
| 2 Lamination duale à un arbre réel | 9 |
| 1 Chez les surfaces | 9 |
| 1.1 Laminations géodésiques mesurées sur les surfaces | 9 |
| 1.2 L’arbre réel dual à une lamination géodésique mesurée | 10 |
| 2 La lamination duale à un arbre réel | 11 |
| 2.1 Une première définition | 11 |
| 2.2 L’application \mathcal{Q} | 12 |
| 2.2.1 Définition “historique” | 12 |
| 2.2.2 Topologie des observateurs et application \mathcal{Q} | 14 |
| 2.2.3 Nouvelle définition de la lamination duale d’un arbre à orbites denses | 15 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3 | La distance duale sur T | 16 |
| 2.3.1 | Définition de la distance duale sur T | 16 |
| 2.3.2 | Un exemple d'arbre dont la distance duale diffère de la distance | 17 |
| 3 | Systèmes d'isométries | 18 |
| 3.1 | Arbres et systèmes d'isométries | 18 |
| 3.1.1 | Vocabulaire des systèmes d'isométries | 18 |
| 3.1.2 | Arbre associé à un système d'isométries – Arbres géométriques | 18 |
| 3.2 | Cœur compact | 20 |
| 3.3 | \mathcal{Q} -indice d'un arbre et induction de Rips | 22 |
| 3.3.1 | Le \mathcal{Q} -indice d'un arbre | 22 |
| 3.3.2 | Induction de Rips | 23 |
| 3.3.3 | Botanique des arbres mélangeants | 25 |
| 4 | Conséquences | 25 |
| 4.1 | Une classification qualitative des automorphismes à puissances irréductibles | 25 |
| 4.2 | Induction de Rauzy-Veech | 29 |
| 4.2.1 | Où commencer à inciser ? | 29 |
| 4.2.2 | Minimalité de la lamination duale à un arbre indécomposable | 31 |
| 4.3 | Courants duaux à un arbre | 33 |
| 4.4 | Lignes de dépliage | 34 |
| 3 | Automorphismes d'un groupe libre | 37 |
| 1 | Dynamique d'un automorphisme de \mathbb{F}_N sur le bord | 38 |
| 2 | Orbites paraboliques | 39 |
| 3 | Stabilisateur d'un point du bord | 40 |
| 4 | Automorphisme induit dans un quotient de Burnside | 41 |
| 4.1 | Quelques résultats | 41 |
| 4.2 | Esquisse de la preuve du Théorème 4.1 | 43 |
| 4.3 | Questions | 44 |
| 5 | Fractal de Rauzy pour un automorphisme iwip | 45 |
| 6 | Substitutions topologiques et pavages substitutifs du plan | 47 |

Arbres, courants et laminations

1 Le groupe libre et son bord

On note \mathbb{F}_N le groupe libre de rang $N \geq 2$. Une base \mathcal{A} étant fixée, on peut voir $\mathbb{F}_N = \mathbb{F}(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots (finis) $w = x_1 \dots x_k$ ($x_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$) réduits (c-à-d $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$) sur l'alphabet $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ (l'élément neutre de \mathbb{F}_N étant représenté par le mot vide 1). La loi du groupe est la concaténation-réduction. On munit $\mathbb{F}_N = \mathbb{F}(\mathcal{A})$ de la topologie discrète.

Le bord de Gromov $\partial\mathbb{F}_N$ de \mathbb{F}_N s'identifie à l'espace des bouts de \mathbb{F}_N . Concrètement, le bord $\partial\mathbb{F}_N$ peut être vu comme l'ensemble $\partial\mathbb{F}(\mathcal{A})$ des mots $X = x_1 \dots x_k \dots$ infinis à droite, réduits sur l'alphabet $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$. On munit $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ de la topologie discrète et $(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{N}^*}$ de la topologie produit. Le bord $\partial\mathbb{F}_N \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{N}^*}$ hérite de la topologie induite : c'est un ensemble de Cantor. Le groupe libre \mathbb{F}_N agit continûment sur son bord par translations à gauche : si $w = x_1 \dots x_k \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$, $Y = y_1 \dots y_l \dots \in \partial\mathbb{F}(\mathcal{A})$, alors $wY = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l \dots \in \partial\mathbb{F}(\mathcal{A})$ où $y_1 \dots y_i = x_k^{-1} \dots x_{k-i+1}^{-1}$ est le plus long préfixe commun à w^{-1} et Y .

On désigne par $\text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ le groupe des automorphismes de \mathbb{F}_N . La conjugaison par $w \in \mathbb{F}_N$ est un automorphisme $i_w \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ défini par $i_w(g) = wgw^{-1}$. L'ensemble des conjugaisons forme le sous-groupe normal $\text{Int}(\mathbb{F}_N)$ des automorphismes intérieurs. Le groupe quotient $\text{Out}(\mathbb{F}_N) = \text{Aut}(\mathbb{F}_N)/\text{Int}(\mathbb{F}_N)$ est le groupe des automorphismes extérieurs de \mathbb{F}_N .

2 Actions par isométries du groupe libre sur un arbre réel

2.1 Arbres réels

Un *arbre réel* est un espace métrique T tel que :

- pour tous points $x, y \in T$, il existe un unique arc topologique dans T , noté $[x, y]$, d'extrémités x et y ,
- de plus, cet arc $[x, y]$ est isométrique au segment réel $[0, d(x, y)]$

où d désigne la distance sur T . De manière équivalente, un arbre réel T est un espace métrique, non vide, géodésique et 0-hyperbolique (au sens de Gromov).

Soit T un arbre réel. Considérons une isométrie w de T . On définit la *longueur de translation* de w dans T par :

$$\|w\|_T = \inf\{d(x, wx) \mid x \in T\}.$$

Seuls deux cas sont possibles :

Cas 1 : $\|w\|_T = 0$. Dans ce cas, w a un point fixe dans T , et l'on dit que w est *elliptique*.

Cas 2 : $\|w\|_T > 0$. Dans ce cas, w laisse invariant un axe (c-à-d l'image d'un plongement de \mathbb{R} dans T), noté $\text{Axe}(w)$, et agit par translation de longueur $\|w\|_T$ sur $\text{Axe}(w)$. On dit que w est *hyperbolique*.

2.2 Outre-espace

On suppose que le groupe libre \mathbb{F}_N agit par isométries sur T . L'action est dite :

- non triviale s'il n'existe pas de point de T laissé fixe par \mathbb{F}_N ,
- minimale s'il n'y a pas de sous arbre propre \mathbb{F}_N -invariant,
- très petite si :
 - i) le stabilisateur d'un arc non dégénéré (c-à-d non réduit à un point) de T est un sous-groupe cyclique ou trivial de \mathbb{F}_N
 - ii) un élément non trivial de \mathbb{F}_N ne fixe pas un tripode non dégénéré de T (un tripode est l'enveloppe convexe dans T de 3 points de T , il est non dégénéré s'il possède un point dont le complémentaire a 3 composantes connexes),
 - iii) un élément non trivial de \mathbb{F}_N ne renverse pas (c-à-d ne permute pas les extrémités d') un arc non dégénéré de T .

De manière équivalente, l'action est très petite si elle vérifie i), ii) et iii') :

iii') pour tout $k \geq 1$, pour tout $g \in \mathbb{F}_N$, $\text{Fix}(g^k) = \text{Fix}(g)$.

Une action de \mathbb{F}_N sur T définit une fonction longueur $\|\cdot\|_T$ dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{F}_N}$ des fonctions de \mathbb{F}_N dans \mathbb{R} , et donc aussi un point de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathbb{F}_N}$.

Fait 2.1 ([CM87, AB87]). *Un arbre T muni d'une action par isométries de \mathbb{F}_N non triviale, minimale et très petite est caractérisé (à isométrie \mathbb{F}_N -équivariante près) par sa fonction longueur $\|\cdot\|_T$.*

On désigne par $\overline{\text{cv}}_N$ l'ensemble des arbres réels T munis d'une action par isométries de \mathbb{F}_N , minimale, non triviale, très petite. L'ensemble $\overline{\text{cv}}_N$ s'injecte dans $\mathbb{R}^{\mathbb{F}_N}$ via les fonctions longueurs : il hérite ainsi de la topologie induite.

On désigne par $\text{cv}_N \subset \overline{\text{cv}}_N$ le sous-ensemble des actions libres et simpliciales, et on pose $\partial\text{cv}_N = \overline{\text{cv}}_N \setminus \text{cv}_N$. On vérifie que $\overline{\text{cv}}_N$ est en fait l'adhérence de cv_N . On désigne par CV_N (resp. $\overline{\text{CV}}_N$ et ∂CV_N) l'espace des classes projectives d'éléments de cv_N (resp. $\overline{\text{cv}}_N$ et ∂cv_N) : CV_N est l'espace de Culler-Vogtmann ou *Outre-espace*. L'espace $\overline{\text{CV}}_N$ est un compact : c'est la compactification de Thurston de l'Outre-espace CV_N . Mentionnons enfin que la topologie sur $\overline{\text{cv}}_N$ est équivalente à la topologie de Gromov équivariante [Pau89]. On pourra consulter [Vog02] pour plus de détails sur l'Outre-espace.

Par la suite, on s'intéressera plus particulièrement aux arbres à orbites denses : on dit que T est à *orbites denses* s'il existe un point de T dont l'orbite (sous l'action de \mathbb{F}_N) est dense dans T . Dans ce cas, toutes les orbites sont denses ; si de plus l'action est très petite, on montre que le stabilisateur d'un arc non dégénéré est trivial.

Exemple 2.2. (i) Considérons un graphe de Cayley $\text{Cay}(\mathbb{F}_N, \mathcal{A})$ de \mathbb{F}_N relatif à une base \mathcal{A} , muni de l'action naturelle de \mathbb{F}_N . On peut imposer que chaque arête soit isométrique à un segment réel non dégénéré, et ce de manière \mathbb{F}_N -équivariante. On obtient un arbre réel, simplicial, muni d'une action libre de \mathbb{F}_N par isométries.

(ii) Un exemple d'arbre réel non simplicial muni d'une action par isométries de \mathbb{F}_N est donné par l'arbre dual à une lamination géodésique mesurée sur une surface à bord. Cette construction est détaillée dans la section 1.2 du chapitre 2.

Pour plus d'informations sur les arbres réels, on pourra consulter par exemple [Bes02, Sha87, Pau89, CL95].

3 Laminations et courants

Cette section s'appuie largement sur [CHL08a]. Concernant plus particulièrement les courants, on pourra consulter les textes d'Ilya Kapovich [Kap06, Kap05].

3.1 Le point de vue “intrinsèque”

Le *bord double* de \mathbb{F}_N est défini comme :

$$\partial^2 \mathbb{F}_N = \partial \mathbb{F}_N \times \partial \mathbb{F}_N \setminus \Delta,$$

où $\Delta = \{(X, X) \mid X \in \partial \mathbb{F}_N\}$. Le bord double est naturellement muni :

- de la topologie induite par la topologie produit sur $\partial \mathbb{F}_N \times \partial \mathbb{F}_N$,
- de l’action de \mathbb{F}_N induite par l’action diagonale de \mathbb{F}_N sur $\partial \mathbb{F}_N \times \partial \mathbb{F}_N$,
- de l’involution $(X, Y) \mapsto (Y, X)$, appelée “flip”.

Une *lamination algébrique* est un sous-ensemble non vide $L \subset \partial^2 \mathbb{F}_N$ qui est

- fermé,
- \mathbb{F}_N -invariant,
- flip-invariant.

L’ensemble des laminations algébriques est noté $\Lambda(\mathbb{F}_N)$.

Un *courant* μ est une mesure de Radon (ou une mesure de Borel qui donne une masse finie aux compacts) positive sur $\partial^2 \mathbb{F}_N$, \mathbb{F}_N -invariante et flip-invariante. Le *support* $\text{Supp}(\mu)$ est l’intersection des fermés de $\partial^2 \mathbb{F}_N$ sur le complémentaire desquels $\mu = 0$. Il est clair que :

Fait 3.1. *Le support d’un courant est une lamination algébrique.*

L’ensemble $\text{Cour}(\mathbb{F}_N)$ des courants de \mathbb{F}_N est muni de la topologie faible étoile.

3.2 Laminations symboliques et courants symboliques

Fixons une base \mathcal{A} du groupe libre $\mathbb{F}_N = \mathbb{F}(\mathcal{A})$. On désigne par $\Sigma_{\mathcal{A}}$ l’ensemble des mots bi-infinis réduits

$$Z = \dots z_{-i-1} z_{-i} \dots z_{-1} z_0 \cdot z_1 z_2 \dots z_i z_{i+1} \dots$$

avec $z_i \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ (comme précédemment, par “réduit”, on entend que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $z_i \neq z_{i+1}^{-1}$). Dans un mot bi-infini, on placera un symbole \cdot entre la lettre d’indice 0 et la lettre d’indice 1 pour repérer l’origine. On munit $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ de la topologie discrète et $(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit : $\Sigma_{\mathcal{A}} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1})^{\mathbb{Z}}$ hérite de la topologie induite qui en fait un Cantor.

L’inverse Z^{-1} d’un élément $Z = \dots z_{i-1} z_i z_{i+1} \dots \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ est $Z^{-1} = \dots z'_{i-1} z'_i z'_{i+1} \dots$ où $z'_i = z_{-i+1}^{-1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le *décalage* $\sigma : \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}}$ est défini par $\sigma(Z) = Z'$ où $Z = \dots z_{i-1} z_i z_{i+1} \dots$, $Z' = \dots z'_{i-1} z'_i z'_{i+1} \dots$ et $z'_i = z_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Le décalage et l’inversion sont des homéomorphismes de $\Sigma_{\mathcal{A}}$.

Une *lamination symbolique* $L_{\mathcal{A}}$, dans la base \mathcal{A} , est un sous-ensemble non vide de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ qui est :

- fermé,
- invariant sous le décalage,
- symétrique (c-à-d invariant sous l'inversion).

Les mots bi-infinis $Z \in L_{\mathcal{A}}$ sont appelés feuilles de $L_{\mathcal{A}}$. L'ensemble des laminations symboliques est noté $\Lambda_{\mathcal{A}}$.

Soit $(X, Y) \in \partial^2 \mathbb{F}_N$, et $X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}} \in \partial \mathbb{F}(\mathcal{A})$ les mots infinis réduits correspondants. On obtient un mot bi-infini réduit $Z_{\mathcal{A}}$ en concaténant-réduisant $X_{\mathcal{A}}^{-1}$ et $Y_{\mathcal{A}}$:

$$Z_{\mathcal{A}} = X_{\mathcal{A}}^{-1} Y_{\mathcal{A}} = \dots x_{i+2}^{-1} x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \cdot y_i y_{i+1} y_{i+2} \dots$$

où $x_1 \dots x_{i-1} = y_1 \dots y_{i-1}$ est le plus long préfixe commun à $X_{\mathcal{A}}$ et $Y_{\mathcal{A}}$. Considérons une lamination algébrique $L \subset \partial^2 \mathbb{F}_N$.

Fait 3.2 ([CHL08a]). *L'ensemble des mots bi-infinis obtenus par le procédé précédent à partir de toutes les feuilles (X, Y) d'une lamination algébrique L forme une lamination symbolique $L_{\mathcal{A}}(L)$. On obtient ainsi une bijection entre $\Lambda(\mathbb{F}_N)$ et $\Lambda_{\mathcal{A}}$.*

Un *courant symbolique* est une mesure de Borel sur $\Sigma_{\mathcal{A}}$ qui est σ -invariante et invariante par l'inversion. Le support d'un courant symbolique est une lamination symbolique. Un courant algébrique détermine un unique courant symbolique, et réciproquement [Kap06].

3.3 Langages laminaires et fonctions de Kolmogorov

Fixons une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N . Un *langage laminaire* dans la base \mathcal{A} est un ensemble \mathcal{L} de mots (finis) réduits sur l'alphabet $\mathcal{A}^{\pm 1}$ (c'est à dire que $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}(\mathcal{A})$) qui est

- *factoriel* : si $u \in \mathcal{L}$, alors tout sous-mot de u est dans \mathcal{L} ;
- *bi-extensible* : si $u \in \mathcal{L}$, alors il existe un mot $w \in \mathcal{L}$ dans lequel u apparaît comme un sous-mot qui n'est ni préfixe, ni suffixe ($w = vuv'$ avec v, v' non triviaux) ;
- *symétrique* : si $u \in \mathcal{L}$, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}$.

L'ensemble des langages laminaires dans la base \mathcal{A} est noté $\Lambda_{\mathcal{L}}$.

Si $L_{\mathcal{A}}$ est une lamination symbolique, l'ensemble de tous les sous-mots finis des feuilles de $L_{\mathcal{A}}$ est un langage laminaire, que l'on note $\mathcal{L}(L_{\mathcal{A}})$.

Réciproquement, un ensemble infini $\mathcal{L} \subset \mathbb{F}(\mathcal{A})$ définit une lamination symbolique $L_{\mathcal{A}}(\mathcal{L})$: la lamination dont les feuilles sont les mots bi-infinis réduits Z tels que tout sous-mot fini $w \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ de Z , ou son inverse w^{-1} , est sous-mot d'un mot de \mathcal{L} .

On obtient ainsi (voir [CHL08a]) une bijection canonique entre l'ensemble des laminations symboliques $\Lambda_{\mathcal{A}}$ et les langages laminaires $\Lambda_{\mathcal{L}}$ dans la base \mathcal{A} .

Dans le contexte des langages laminaires, on peut définir l'équivalent d'un courant de la manière suivante. Une *fonction de Kolmogorov* est une application

$$\mu_{\mathcal{A}} : \mathbb{F}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie, pour tout mot réduit $w = y_1 \dots y_k \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$:

- (i) $\mu_{\mathcal{A}}(w^{-1}) = \mu_{\mathcal{A}}(w)$,
- (ii) $\mu_{\mathcal{A}}(w) = \sum_{y \neq y_k^{-1}} \mu_{\mathcal{A}}(wy) = \sum_{y \neq y_1^{-1}} \mu_{\mathcal{A}}(yw)$ (pour $y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$).

Un courant μ définit une fonction de Kolmogorov, et réciproquement. Le courant μ correspond à la fonction de Kolmogorov $\mu_{\mathcal{A}}$ si, et seulement si, pour tout mot réduit $w = y_1 \dots y_k \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ on a

$$\mu_{\mathcal{A}}(w) = \mu(C_{\mathcal{A}}(w)),$$

où $C_{\mathcal{A}}(w) \subset \partial^2 \mathbb{F}(\mathcal{A}) = \partial^2 \mathbb{F}_N$ est le *cylindre algébrique* défini par :

$$\{(X_{\mathcal{A}}, wX'_{\mathcal{A}}) \mid X_{\mathcal{A}} = x_1 x_2 \dots, X'_{\mathcal{A}} = x'_1 x'_2 \dots \in \partial \mathbb{F}(\mathcal{A}), x_1 \neq y_1, x'_1 \neq y_k^{-1}\}.$$

Pour plus de détails, voir [Kap06].

3.4 Relation entre les trois points de vue

Dans les sections qui précèdent, on a introduit trois ensembles : l'ensemble $\Lambda(\mathbb{F}_N)$ des laminations algébriques, l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{A}}$ des laminations symboliques dans la base \mathcal{A} , l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{L}}$ des langages laminaires dans la base \mathcal{A} . On a aussi explicité les bijections naturelles entre ces ensembles.

Dans [CHL08a], on munit chacun de ces ensembles de topologies de Hausdorff. On donne explicitement une distance sur chacun des trois ensembles qui induit la topologie.

On décrit aussi dans [CHL08a] l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ sur $\Lambda(\mathbb{F}_N)$, $\Lambda_{\mathcal{A}}$ et $\Lambda_{\mathcal{L}}$.

Si $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$, on choisit un représentant $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ de Φ . L'automorphisme φ induit un homéomorphisme $\partial^2 \varphi$ de $\partial^2 \mathbb{F}_N$ défini par $(X, Y) \in \partial^2 \mathbb{F}_N \mapsto (\partial \varphi(X), \partial \varphi(Y))$. On définit l'image $\Phi(L)$ d'une lamination algébrique L par Φ comme la lamination dont les feuilles sont les images des feuilles de L par $\partial^2 \varphi$. L'invariance de L sous l'action de \mathbb{F}_N garantit que $\Phi(L)$ ne dépend pas du choix du représentant φ de Φ .

Soit $u, v \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ tels que le mot uv est réduit. Le mot $\varphi(u)\varphi(v)$ n'est pas, en général, réduit. Mais il existe une constante C qui ne dépend que de \mathcal{A} et de φ (et ne dépend pas des mots $u, v \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$) et qui majore la longueur de la simplification qui peut avoir lieu dans $\varphi(u)\varphi(v)$ [Coo87]. La plus petite de ces constantes s'appelle

la *borne de simplification de Cooper* du couple (φ, \mathcal{A}) ; on la note $C_{(\varphi, \mathcal{A})}$. On peut maintenant définir l'image $\Phi(\mathcal{L})$ d'un langage laminaire \mathcal{L} par Φ . Les éléments de $\Phi(\mathcal{L})$ sont les mots de $\mathbb{F}(\mathcal{A})$ obtenus de la manière suivante : pour chaque mot w de \mathcal{L} , on retire à $\varphi(w)$ son préfixe et son suffixe de longueur $C_{(\varphi, \mathcal{A})}$. On vérifie que $\Phi(\mathcal{L})$ est bien un langage laminaire, et ne dépend pas du choix du représentant φ de Φ .

Je ne vais pas décrire ici l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ sur $\Lambda_{\mathcal{A}}$, mais simplement signaler qu'elle fait aussi intervenir la borne de simplification de Cooper.

On obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 3.3 ([CHL08a]). *Les bijections naturelles entre les espaces $\Lambda(\mathbb{F}_N)$, $\Lambda_{\mathcal{A}}$ et $\Lambda_{\mathcal{L}}$ sont des homéomorphismes $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ -équivariant.*

Ce théorème nous permet, dans la suite ce texte, de parler de lamination sans préciser nécessairement s'il s'agit de lamination algébrique, symbolique, ou même de langage laminaire.

Lamination duale à un arbre réel

1 Chez les surfaces

Comme souvent, c'est le cas des surfaces qui nous a servi de guide pour définir la lamination duale à un arbre réel. Je commence par en dire quelques mots.

1.1 Laminations géodésiques mesurées sur les surfaces

Soit S une surface orientable, compacte, de genre $g \geq 1$, à bord non vide. Son groupe fondamental $\pi_1 S$ est un groupe libre \mathbb{F}_N de rang $N \geq 2$ ($N = 2g - 1 + b$ où b est le nombre de composantes de bord). On munit S d'une structure hyperbolique telle que le bord de S soit une réunion de géodésiques fermées. Le revêtement universel \tilde{S} de S est un sous-ensemble convexe de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , et $\pi_1 S = \mathbb{F}_N$ agit par isométries sur \tilde{S} . Le bord $\partial \mathbb{F}_N$ de \mathbb{F}_N se plonge alors naturellement dans le bord de $\partial \mathbb{H}^2 = S_\infty^1$ de \mathbb{H}^2 .

Considérons une famille non vide de géodésiques de \tilde{S} , appelées feuilles, deux à deux disjointes, telles que leur réunion \mathfrak{L} soit un fermé \mathbb{F}_N -invariant de \mathbb{H}^2 . L'ensemble \mathfrak{L} et sa projection \mathfrak{L} dans S sont appelés une *lamination géodésique* (voir [CB88]). La projection d'une feuille de \mathfrak{L} est une feuille de \mathfrak{L} .

Fait 1.1. *Une lamination géodésique $\mathfrak{L} \subset S$ détermine une lamination algébrique $L(\mathfrak{L})$ qui est donnée par les couples de points terminaux dans $\partial \mathbb{F}_N = \partial \tilde{S} \subset \partial \mathbb{H}^2$ des*

feuilles de $\tilde{\mathfrak{L}}$. On a :

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' \iff L(\mathfrak{L}) = L(\mathfrak{L}')$$

Remarque 1.2. Le plongement de $\partial\mathbb{F}_N$ dans $\partial\mathbb{H}^2 = S_\infty^1$ induit un ordre cyclique \mathbb{F}_N -invariant sur $\partial\mathbb{F}_N$: étant donnés quatre points $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \partial\mathbb{F}_N$, l'ordre dans lequel on les lit en parcourant S_∞^1 traduit le fait que les géodésiques de \tilde{S} joignant X_1 et X_2 d'une part, et Y_1 et Y_2 d'autre part, se coupent ou non. Les feuilles d'une lamination géodésique \mathfrak{L} étant deux à deux disjointes, la lamination algébrique $L(\mathfrak{L})$ a la propriété remarquable de "préserver l'ordre cyclique" sur $\partial\mathbb{F}_N$ induit par le plongement dans $\partial\mathbb{H}^2 = S_\infty^1$. Les laminations algébriques préservant un ordre cyclique sur $\partial\mathbb{F}_N$ forment un sous-ensemble strict de $\Lambda(\mathbb{F}_N)$.

Une lamination géodésique \mathfrak{L} est dite *minimale* si \mathfrak{L} est l'adhérence dans S de chacune de ses feuilles. On dit que \mathfrak{L} *remplit* S si toute géodésique (sauf les composantes de bord) de S rencontre \mathfrak{L} .

Soit \mathcal{J} l'ensemble des arcs lisses de S dont les extrémités sont dans $S \setminus \mathfrak{L}$ et qui intersectent les feuilles de \mathfrak{L} transversalement. Une *mesure transverse* sur \mathfrak{L} est une application $\mathfrak{m} : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que (voir [Kap01]) :

- la restriction $\mathfrak{m}|_\gamma$ de \mathfrak{m} à $\{\gamma' \in \mathcal{J} \mid \gamma' \text{ est un sous-arc de } \gamma\}$ est induite par une mesure de Borel σ -additive sur γ ,
- $\mathfrak{m}(\gamma) = \mathfrak{m}(\gamma')$ s'il existe une isotopie entre $\gamma, \gamma' \in \mathcal{J}$ réalisée par des éléments de \mathcal{J} ,
- si $\mathfrak{m}(\gamma) > 0$, alors $\gamma \cap \mathfrak{L} \neq \emptyset$.

Une telle mesure transverse se relève naturellement à \tilde{S} en une mesure transverse $\tilde{\mathfrak{m}}$ à $\tilde{\mathfrak{L}}$, \mathbb{F}_N -invariante.

Fait 1.3. 1) Une mesure transverse \mathfrak{m} sur \mathfrak{L} détermine un courant $\mu_{\mathfrak{m}}$. On a :

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \iff \mu_{\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m}'}.$$

- 2) Si $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ est une lamination géodésique mesurée sur S , on a $\text{Supp}(\mu_{\mathfrak{m}}) \subset L(\mathfrak{L})$.
Si de plus \mathfrak{L} est minimale, alors $\text{Supp}(\mu_{\mathfrak{m}}) = L(\mathfrak{L})$.

1.2 L'arbre réel dual à une lamination géodésique mesurée

On définit une pseudo-distance $d_{\mathfrak{m}}$ sur \tilde{S} par :

- $d_{\mathfrak{m}}(x, y) = 0$, si x, y sont dans une même feuille de $\tilde{\mathfrak{L}}$,
- $d_{\mathfrak{m}}(x, y) = \inf\{\tilde{\mathfrak{m}}(\gamma) : \gamma \in \tilde{\mathcal{J}} \text{ joignant } x \text{ et } y\}$, sinon,

où $\tilde{\mathcal{J}}$ est l'ensemble des arcs de \tilde{S} se projetant sur des arcs de \mathcal{J} .

On désigne par $T_{\mathfrak{m}}$ l'espace métrique obtenu en quotientant \tilde{S} par la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $d_{\mathfrak{m}}(x, y) = 0$. On note encore $d_{\mathfrak{m}}$ la distance sur $T_{\mathfrak{m}}$. L'action de \mathbb{F}_N sur \tilde{S} induit une action par isométries sur $T_{\mathfrak{m}}$.

Fait 1.4. T_m est un arbre réel, muni d'une action très petite de \mathbb{F}_N .

A partir de l'action de \mathbb{F}_N sur T_m , on peut reconstruire la surface S et la lamination géodésique mesurée dont T_m est issu, en utilisant la machinerie de Rips (voir par exemple [Bes02, Kap01], voir aussi [Sko96]).

Chez les surfaces, arbres réels et laminations géodésiques mesurées sont donc des “objets duaux” qui “contiennent la même information”. Une grande partie de mon travail de ces dernières années a consisté à essayer d'établir une telle correspondance entre arbres, laminations et courants dans le contexte des groupes libres, et de comprendre dans quelle mesure la dualité observée dans le contexte des surfaces peut encore avoir lieu (ou plutôt, ne plus avoir lieu). Ce travail a été mené à bien avec Thierry Coulbois et Martin Lustig [CHL07, CHL08a, CHL08b, CHL08c, CHL09, CH10], et plus récemment, avec Patrick Reynolds [CHR11].

2 La lamination duale à un arbre réel

Le premier pas du programme évoqué ci-dessus a consisté à définir la lamination duale d'un arbre réel. Il s'avère que l'on peut en donner, lorsque l'arbre est à orbites denses, plusieurs (au moins trois) définitions équivalentes.

2.1 Une première définition

Soit T un arbre réel muni d'une action par isométries de \mathbb{F}_N . On suppose comme précédemment que l'action est non triviale, minimale et très petite, mais on exclut le cas d'une action libre sur un arbre T simplicial (c-à-d $T \in \partial \text{cv}_N$).

Fixons une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N . On définit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(T) \subset \mathbb{F}(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des mots réduits $w \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un mot $v \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ cycliquement réduit dont w est un sous-mot et dont la distance de translation dans T vérifie $\|v\|_T < \varepsilon$: $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(T)$ est un langage laminaire.

La *lamination duale* à T , notée $L(T)$, est définie comme la lamination dont le langage laminaire est $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(T)$. On montre que :

Fait 2.1 ([CHL08b]). *Cette définition est indépendante du choix de la base \mathcal{A} .*

Remarque 2.2. Dans le cas d'une action libre simpliciale, la définition reste valable, mais $L(T)$ est l'ensemble vide (et donc n'est pas une lamination algébrique).

Considérons le cas où $T = T_m$ est l'arbre dual d'une lamination géodésique mesurée $(\mathcal{L}, \mathbf{m})$ sur une surface S à bord – on utilise les notations de la section 1.

Fait 2.3. *On a :*

$$L(\mathfrak{L}) \subseteq L(T_{\mathfrak{m}}).$$

Si de plus \mathfrak{L} est minimale et remplit S , alors la lamination $L(T_{\mathfrak{m}})$ s'obtient en rajoutant à la lamination $L(\mathfrak{L})$ ses feuilles diagonales.

Considérons une lamination géodésique \mathfrak{L} minimale et qui remplit S . Les composantes connexes du complémentaire de \mathfrak{L} dans \tilde{S} sont des n -gones idéaux (cf [CB88]). Lorsque $n \geq 4$, il y a des géodésiques dans le n -gone joignant deux sommets du n -gone : ce sont les “feuilles diagonales” de \mathfrak{L} .

2.2 L'application \mathcal{Q}

2.2.1 Définition “historique”

Topologie métrique sur \hat{T} . Considérons un arbre réel T . Un rayon est l'image d'un plongement de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans T . Deux rayons de T sont équivalents s'ils ont une intersection non compacte. Le bord de Gromov de T , que l'on note ∂T , est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons dans T . On désigne par \overline{T} le complété (de Cauchy) de T et par \hat{T} la réunion de \overline{T} et ∂T .

Soit P un point de T . Une composante connexe de $T \setminus \{P\}$ est appelée une *direction de T en P* .

La distance sur T s'étend canoniquement en une distance sur \overline{T} , et induit canoniquement une topologie sur \hat{T} , appelée *topologie métrique* :

- une base de voisinages d'un point de \overline{T} est donnée par les boules ouvertes centrées en ce point,
- une base de voisinages d'un point $X \in \partial T$ est donnée par l'ensemble des directions de T qui ont une intersection non bornée avec un rayon représentant X .

Définition de l'application \mathcal{Q} par Levitt-Lustig. Gilbert Levitt et Martin Lustig ont introduit dans [LL03] une application $\mathcal{Q} : \partial \mathbb{F}_N \rightarrow \hat{T}$. Plus tard, dans [LL08], ils complètent l'étude de cette application. Le théorème suivant résume les résultats de [LL08, LL03] concernant l'application \mathcal{Q} , et peut servir de définition.

Théorème 2.4 (Levitt-Lustig [LL08, LL03]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. Il existe une application \mathbb{F}_N -équivariante, surjective $\mathcal{Q} : \partial \mathbb{F}_N \rightarrow \hat{T}$ caractérisée par la propriété suivante.*

Pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{F}_N qui converge vers $X \in \partial \mathbb{F}_N$ et pour tout point $P \in T$, si la suite des points $u_k P \in T$ converge dans \hat{T} vers un point Q , alors $\mathcal{Q}(X) = Q$.

L'idée de la construction de \mathcal{Q} est la suivante. Supposons qu'il existe un arbre $T_0 \in \text{CV}_N$ et une application $f : T_0 \rightarrow T$, \mathbb{F}_N -équivariante, dont la restriction à chaque arête de T_0 est une isométrie. Supposons de plus que f est à rebours borné¹ : pour tout x, y dans T_0 , $f([x, y]) \subseteq N_C([f(x), f(y)])$ (où N_C désigne le C -voisinage). Le bord ∂T_0 s'identifie naturellement à $\partial \mathbb{F}_N$: un élément $X \in \partial \mathbb{F}_N$ se représente par un rayon $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow T_0$.

Soit r l'image dans T de $f \circ \rho$. On montre que seuls deux cas sont possibles.

Cas 1 : r est non borné, et dans ce cas, quitte à supprimer un sous-chemin initial de ρ , r est contenu dans le C -voisinage d'un rayon de T , et donc converge vers le point de ∂T défini par ce rayon ;

Cas 2 : r est borné, et dans ce cas, quitte à supprimer un sous-chemin initial de ρ , r est contenu dans une boule B_{T_0} de T de rayon C .

Maintenant, l'idée est de faire varier T_0 . On rappelle que le *volume* $\text{vol}(T_0)$ d'un arbre $T_0 \in \text{CV}_N$ est la somme des longueurs des arêtes de T_0/\mathbb{F}_N . Etant donné un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$, et un réel $\varepsilon > 0$, Levitt et Lustig construisent un arbre simplicial $T_0 \in \text{CV}_N$ de volume $\text{vol}(T_0) < \varepsilon$ et une application $f : T_0 \rightarrow T$, \mathbb{F}_N -équivariante, dont la restriction à chaque arête de T_0 est une isométrie. Une telle application f est à rebours borné par $\text{vol}(T_0)$.

On vérifie alors que, pour $X \in \partial \mathbb{F}_N$ donné, le fait d'être dans le Cas 1 ou le Cas 2 ne dépend pas du choix de T_0 . De plus, dans le Cas 1, le point de ∂T défini par X lui non plus ne dépend pas du choix de T_0 : c'est le point $\mathcal{Q}(X) \in \partial T$. Enfin, dans le Cas 2, l'intersection des boules B_{T_0} , $T_0 \in \text{CV}_N$, est non vide, donc réduite à un point (puisque leur rayon peut être rendu aussi petit que l'on veut) : c'est le point $\mathcal{Q}(X) \in \overline{T}$.

Il est à noter que :

Fait 2.5 (Levitt-Lustig[LL03]). *Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre à orbites denses. L'application $\mathcal{Q} : \partial \mathbb{F}_N \rightarrow \widehat{T}$ n'est, en général, ni injective, ni continue.*

Pour “voir” la non-continuité de \mathcal{Q} , un exemple typique est le suivant. Considérons un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$, à orbite denses, qui possède un point P dont le stabilisateur est non trivial. Soit a un élément du stabilisateur de P , et b un élément hyperbolique. Soit $X_k = a^k b^\infty \in \partial \mathbb{F}_N$: la suite X_k tend vers a^∞ . On voit facilement que $\mathcal{Q}(X_k) \in \partial T$ alors que $\mathcal{Q}(a^\infty) = P \in T$.

Soulignons enfin que lorsque $T = T_{\mathbf{m}}$ est l'arbre dual à une lamination géodésique mesurée $(\mathfrak{L}, \mathbf{m})$ sur une surface S , l'application \mathcal{Q} est donnée par l'application “d'inclusion-rétraction” canonique $\partial \mathbb{F}_N \subset \mathbb{H}^2 \cup S_\infty^1 \rightarrow \widehat{T}_{\mathbf{m}} = \overline{T}_{\mathbf{m}} \cup \partial T_{\mathbf{m}}$. En particulier,

¹ *Rebours borné* vaut ici traduction de l'anglais *bounded backtracking*.

si X est un point de S_∞^1 atteint par une feuille de \mathcal{L} , alors $\mathcal{Q}(X)$ est précisément le point de T_m défini par cette feuille.

2.2.2 Topologie des observateurs et application \mathcal{Q}

La définition assez “technique” de l’application \mathcal{Q} , et, plus encore, le fait qu’elle ne soit pas continue, nous a conduit à affaiblir la topologie de T : on obtient alors une définition plus simple de \mathcal{Q} .

On peut étendre la définition d’une direction : si P un point de \widehat{T} , on appelle *direction de \widehat{T} en P* toute composante connexe de $\widehat{T} \setminus \{P\}$. La *topologie des observateurs*² sur \widehat{T} est la topologie engendrée par les directions de \widehat{T} ³. On désigne par \widehat{T}^{obs} l’espace \widehat{T} muni de la topologie des observateurs.

Proposition 2.6 ([CHL07]). *Soit T un arbre réel. Alors :*

- *l’identité $\text{id} : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}^{\text{obs}}$ est continue,*
- *la topologie métrique et la topologie des observateurs sont les mêmes sur les sous-arbres finis de T ,*
- *\widehat{T}^{obs} est compact.*

Remarque 2.7. Il est à noter que si T est à orbites denses, alors, contrairement à \widehat{T}^{obs} , ni T , ni \widehat{T} ne sont localement compacts. Typiquement, considérons une suite P_k de points de \widehat{T} telle que :

- $d(P_0, P_k)$ ne tend pas vers 0,
- $d(P_0, Q_k)$ tend vers 0,

où Q_k est défini par $[P_0, Q_k] = [P_0, P_k] \cap [P_0, P_{k+1}]$. La suite P_k ne converge pas dans \widehat{T} muni de la topologie métrique, mais converge vers P_0 dans \widehat{T}^{obs} .

Bien que \widehat{T}^{obs} ne soit pas un arbre réel, cela reste un arbre, qui a la même combinatoire que \widehat{T} : les arcs topologiques et les points de branchement de \widehat{T} et de \widehat{T}^{obs} sont les mêmes. En revanche, dans \widehat{T}^{obs} , il n’est pas vraiment possible de faire la différence entre les points de ∂T et les points de $\overline{T} \setminus T$ (ce sont tous des points de valence 1).

La topologie des observateurs rend l’application \mathcal{Q} continue. Précisément, on montre :

Théorème 2.8 ([CHL07, CHL09]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. Pour tout point $P \in T$, l’application*

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_P : \mathbb{F}_N &\rightarrow \widehat{T}^{\text{obs}} \\ w &\mapsto wP \end{aligned}$$

²La terminologie nous a été proposée par Vincent Guirardel.

³Cette topologie est utilisée dans d’autres contextes : voir, par exemple, [FJ04]

s'étend continûment de manière unique en une application $\partial\mathbb{F}_N \rightarrow \widehat{T}^{obs}$. Cette extension ne dépend pas de $P \in T$: c'est l'application \mathcal{Q} .

L'application $\mathcal{Q} : \partial\mathbb{F}_N \rightarrow \widehat{T}^{obs}$ est \mathbb{F}_N -équivariante, surjective et continue.

2.2.3 Nouvelle définition de la lamination duale d'un arbre à orbites denses

Pour un arbre $T \in \overline{cv}_N$ à orbites denses, on obtient une définition alternative de la lamination duale en utilisant l'application \mathcal{Q} .

Théorème 2.9 ([CHL08b]). *Si $T \in \overline{cv}_N$ est un arbre à orbites denses, alors*

$$L(T) = \{(X, Y) \in \partial^2\mathbb{F}_N \mid \mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(Y)\}.$$

On désigne par $\partial\mathbb{F}_N/L(T)$ le quotient du bord $\partial\mathbb{F}_N$ par la relation d'équivalence : $X \sim Y$ si et seulement si $(X, Y) \in L(T)$. D'après le théorème 2.9, l'application \mathcal{Q} induit une bijection \mathbb{F}_N -équivariante de $\partial\mathbb{F}_N/L(T)$ sur \widehat{T} . En fait, la lamination duale détermine complètement l'arbre muni de la topologie des observateurs :

Théorème 2.10 ([CHL07]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. L'application \mathcal{Q} induit un homéomorphisme \mathbb{F}_N -équivariant*

$$\partial\mathbb{F}_N/L(T) \xrightarrow{\approx} \widehat{T}^{obs}$$

où $\partial\mathbb{F}_N/L(T)$ est muni de la topologie quotient.

Remarque 2.11. Le Théorème 2.10 montre que \widehat{T}^{obs} est entièrement déterminé par $L(T)$. Mais il n'est pas vrai, en général, que T (ou \widehat{T}) est déterminé, en tant qu'espace topologique (encore moins en tant qu'espace métrique), par $L(T)$. Par exemple, supposons que $\mathfrak{L} \subset S$ est une lamination géodésique minimale, qui remplit S , et qui est non uniquement ergodique (de telles laminations existent, cf [Vee69, KN76]). Alors deux mesures ergodiques \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 projectivement distinctes sur \mathfrak{L} donnent lieu à deux arbres duaux T_1 et T_2 dans \overline{cv}_N , à orbites denses, qui ont la même lamination duale $L(T_1) = L(T_2)$ (c-à-d $\widehat{T}_1^{obs} = \widehat{T}_2^{obs}$). On peut montrer, en utilisant le fait que les mesures \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont étrangères, qu'il n'existe pas d'homéomorphisme \mathbb{F}_N -équivariant entre T_1 et T_2 .

Cette remarque nous conduit à formuler la question suivante.

Question 2.12. *Considérons deux arbres T_1, T_2 de \overline{cv}_N à orbites denses tels qu'il existe un homéomorphisme \mathbb{F}_N -équivariant $f : \widehat{T}_1^{obs} \rightarrow \widehat{T}_2^{obs}$. Est-il vrai que si f induit un homéomorphisme entre \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 (pour la topologie métrique), alors T_1 et T_2 sont homothétiques ?*

En fait, la question serait plus exactement de déterminer les hypothèses “minimales” sur T_1 et T_2 pour que la conclusion soit vraie.

Remarque 2.13. Nous voulons aussi signaler une troisième définition possible de la lamination duale d’un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ à orbites denses. Fixons une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N et considérons l’ensemble $\mathcal{L}_\infty(T) \subseteq \mathbb{F}(\mathcal{A})$ défini par la condition suivante : un mot $w \in \mathbb{F}(\mathcal{A})$ est dans $\mathcal{L}_\infty(T)$ s’il existe un élément $X \in \mathcal{Q}^{-1}(\overline{T})$ tel que w ou w^{-1} apparaît une infinité de fois comme sous-mot de $X \in \partial\mathbb{F}(\mathcal{A})$. On vérifie que $\mathcal{L}_\infty(T)$ est un langage laminaire, et on montre dans [CHL08b] que la lamination associée à $\mathcal{L}_\infty(T)$ est la lamination duale à T .

2.3 La distance duale sur T

2.3.1 Définition de la distance duale sur T

Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ à orbites denses. L’application $\mathcal{Q} : \partial\mathbb{F}_N \rightarrow \widehat{T}$ induit une application \mathbb{F}_N -équivariante $\mathcal{Q}^2 : L(T) \rightarrow \overline{T}$. Bien que l’application \mathcal{Q} ne soit pas en général continue, il est à remarquer que :

Proposition 2.14 ([CHL08b]). *L’application $\mathcal{Q}^2 : L(T) \rightarrow \overline{T}$ est continue (\overline{T} muni de la topologie métrique).*

L’image de $L(T)$ par l’application \mathcal{Q}^2 est l’ensemble limite Ω de T :

$$\Omega = \mathcal{Q}^2(L(T)).$$

C’est un sous-ensemble de \overline{T} .

Considérons un courant μ porté par $L(T) : \text{Supp}(\mu) \subseteq L(T)$. Puisque \mathcal{Q}^2 est continue, on peut transporter μ par \mathcal{Q}^2 : on obtient une mesure de Borel \mathbb{F}_N -invariante $\mu_{\overline{T}}$ sur \overline{T} , dont le support est contenu dans Ω . On définit une “pseudo-distance” sur \overline{T} , en posant :

$$d_\mu(x, y) = \mu_{\overline{T}}([x, y]) \quad (= \mu((\mathcal{Q}^2)^{-1}([x, y])))$$

pour tout $x, y \in \overline{T}$. On parle de “pseudo-distance” car, a priori, deux points distincts peuvent être à distance d_μ nulle ou infinie.

Fait 2.15. *Soit $(\mathfrak{L}, \mathfrak{m})$ une lamination géodésique mesurée sur une surface S . On désigne par $T_{\mathfrak{m}}$ l’arbre dual (et par $d_{\mathfrak{m}}$ la distance sur $T_{\mathfrak{m}}$). La mesure transverse \mathfrak{m} définit un courant $\mu_{\mathfrak{m}}$ qui vérifie $\text{Supp}(\mu_{\mathfrak{m}}) \subseteq L(\mathfrak{L}) \subseteq L(T_{\mathfrak{m}})$. Dans ce cas, on a :*

$$d_{\mu_{\mathfrak{m}}} = d_{\mathfrak{m}}$$

Cette parfaite dualité n’a plus cours, en toute généralité, pour un arbre réel quelconque. On explique ci-après comment construire un contre-exemple.

2.3.2 Un exemple d'arbre dont la distance duale diffère de la distance

Un automorphisme φ de \mathbb{F}_N est dit à *puissances irréductibles* (ou *iwip*⁴) s'il n'existe pas de facteur libre propre non-trivial de \mathbb{F}_N qui soit envoyé sur un conjugué de lui-même par une puissance (strictement positive) de φ .

Fait 2.16 ([GJLL98]). *Si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est iwip, alors il existe un unique (à homothétie près) arbre réel T_φ muni d'une action très petite, laissé projectivement invariant par φ , avec un facteur de dilatation $\lambda_\varphi > 1$: pour tout $w \in \mathbb{F}_N$, on a*

$$\|\varphi(w)\|_{T_\varphi} = \lambda_\varphi \|w\|_{T_\varphi}.$$

De plus T_φ est à orbites denses.

Les automorphismes *iwip* de \mathbb{F}_N sont considérés comme les analogues, pour le groupe libre, des homéomorphismes pseudo-Anosov d'une surface hyperbolique. Plus précisément, si S est une surface possédant une seule composante de bord, alors un homéomorphisme pseudo-Anosov f de S induit un automorphisme φ *iwip* sur $\mathbb{F}_N = \pi_1(S)$. L'homéomorphisme f fixe deux laminations géodésiques mesurées, la lamination stable $(\mathfrak{L}^+, \mathfrak{m}^+)$ et la lamination instable $(\mathfrak{L}^-, \mathfrak{m}^-)$: il existe un facteur $\lambda_f > 1$ tel que $f_*\mathfrak{m}^+ = \lambda_f^{-1}\mathfrak{m}^+$ et $f_*\mathfrak{m}^- = \lambda_f\mathfrak{m}^-$ (cf [FLP76, CB88]). Dans ce cas $T_\varphi = T_{\mathfrak{m}^-}$, $T_{\varphi^{-1}} = T_{\mathfrak{m}^+}$, $\lambda_\varphi = \lambda_{\varphi^{-1}} = \lambda_f$.

Fait 2.17. *Il existe des automorphismes iwip φ de \mathbb{F}_N tels que $\lambda_\varphi \neq \lambda_{\varphi^{-1}}$.*

C'est par exemple le cas de l'automorphisme de $F_3 = \langle a, b, c \rangle$ défini par $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ac$, $\varphi(c) = a$. On reviendra plus en détail sur le taux de croissance d'un automorphisme *iwip* dans la section 4.1.

Considérons un tel automorphisme φ . Cet automorphisme agit sur l'arbre réel T_φ en multipliant la distance par un facteur λ_φ . D'autre part, la lamination duale $L(T_\varphi)$ est uniquement ergodique, c-à-d porte, à multiplication par un scalaire non nul près, un seul courant μ (c'est un fait général pour tous les automorphismes *iwip*). On peut montrer que φ agit sur $L(T_\varphi)$ en multipliant le courant μ par $\lambda_{\varphi^{-1}}$. Donc φ agit sur T_φ en multipliant la distance duale $d_* = d_\mu$ par $\lambda_{\varphi^{-1}}$. C'est la clé de la preuve du :

Théorème 2.18 ([CHL08c]). *Si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est à puissances irréductibles avec $\lambda_\varphi \neq \lambda_{\varphi^{-1}}$, alors la pseudo-distance duale d_* est totalement dégénérée sur T_φ : soit $d_*(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in T_\varphi$, soit $d_*(x, y) = \infty$ pour tout $x, y \in T_\varphi$, $x \neq y$.*

⁴*Iwip* est en fait l'acronyme de l'anglais *irreducible with irreducible powers*.

3 Systèmes d'isométries

3.1 Arbres et systèmes d'isométries

3.1.1 Vocabulaire des systèmes d'isométries

Une *forêt compacte* est un espace métrique qui a un nombre fini de composantes connexes, et chacune de ces composantes est un arbre réel compact.

Une *isométrie partielle* d'une forêt compacte F est une isométrie $a : K \rightarrow K'$ entre deux arbres compacts $K, K' \subseteq F$. Elle est *non vide* si son domaine $K = \text{dom}(a)$ est non vide. Un *système d'isométries partielles*, ou plus simplement *système d'isométries*, $S = (F, A)$ consiste en une forêt compacte F et un ensemble fini A d'isométries partielles non vides de F .

A un système d'isométries $S = (F, A)$ est associé un graphe $\Gamma = \Gamma_S$ dont les sommets sont les composantes connexes de F et les arêtes orientées sont les isométries de A : l'arête $a \in A$ part de la composante connexe de F qui contient son domaine et atteint la composante connexe de F qui contient son image. L'arête obtenue en renversant l'orientation de a s'identifie à l'isométrie partielle a^{-1} .

Un chemin réduit $w = x_1 \dots x_p$, avec $x_i \in \mathcal{A}^{\pm 1}$, dans Γ définit une isométrie partielle (éventuellement vide), encore notée w : c'est la composée $x_1 \circ \dots \circ x_p$. Un chemin w de Γ est *admissible* si l'isométrie associée est non vide. Un chemin infini réduit $X = x_1 \dots x_i \dots$ de Γ est *admissible* si tous ses sous-chemins finis sont admissibles. Le *domaine* $\text{dom}(X)$ de X est l'intersection des domaines de ses sous-chemins initiaux. Un chemin bi-infini $Z = \dots z_{-1}z_0 \cdot z_1z_2 \dots$ de Γ est *admissible* si tout ses sous-chemins finis sont admissibles. Le *domaine* $\text{dom}(Z)$ de Z est l'intersection des domaines de $Z^+ = z_1z_2 \dots$ et de $Z^- = z_0^{-1}z_{-1}^{-1}z_{-2}^{-1} \dots$. L'ensemble des chemins bi-infinis admissibles, vu comme mots bi-infinis sur l'alphabet A , est une lamination symbolique (au sens de la section 3.2 du chapitre 1). On appelle cette lamination la *lamination admissible de S* , et on la désigne par $L_{\text{adm}}(S)$.

Le système d'isométries $S = (F, A)$ est à *générateurs indépendants*⁵ si tout chemin infini réduit admissible de Γ a son domaine réduit à un point.

3.1.2 Arbre associé à un système d'isométries – Arbres géométriques

On considère maintenant un système d'isométries $S = (K, A)$ où K est un arbre réel compact. On construit un arbre T_S associé à S en recollant un nombre dénombrable de copies de K (une copie par élément de $\mathbb{F}_N = \mathbb{F}(A)$ en fait) le long

⁵La définition donnée ici est équivalente à la définition originale proposée par Damien Gaboriau [Gab97].

des isométries partielles :

$$T_S = \mathbb{F}_N \times K / \sim$$

où la relation d'équivalence \sim est engendrée par :

$$(u, x) \sim (v, y) \iff x(u^{-1}v) = y.$$

L'action de \mathbb{F}_N par translation sur lui-même induit une action de \mathbb{F}_N sur T_S par isométries⁶. Alternativement, on peut aussi construire T_S comme l'espace des feuilles du feuilletage du complexe de bandes associé au système $S = (K, A)$ – voir par exemple [Bes02, Kap01].

Un arbre réel compact est *fini* s'il a un nombre fini de points de valence 1. On dit qu'un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ est *géométrique* s'il existe un système d'isométries $S = (K, A)$ où K est un arbre réel fini tel que $T = T_S$. Les arbres géométriques ont joué un rôle important dans l'étude de $\overline{\text{cv}}_N$. En effet, d'une part, en “codant” un arbre géométrique par un système d'isométries, on a un outil pratique avec lequel on peut travailler, calculer. D'autre part, on peut approcher tout arbre de $\overline{\text{cv}}_N$ par une suite d'arbres géométriques. L'idée est de prendre une suite exhaustive K_n de sous-arbres finis de $T \in \overline{\text{cv}}_N$, et de considérer les systèmes d'isométries $\mathcal{K}_n = (K_n, \mathcal{A})$ associés (voir section 3.2) : la suite $T_{\mathcal{K}_n}$ converge vers T .

C'est cette stratégie qui a notamment été suivie par Damien Gaboriau et Gilbert Levitt dans [GL95]. Ils y introduisent l'*indice géométrique*⁷ d'un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$. Pour cela, on définit d'abord un indice local. Rappelons que le stabilisateur $\text{Stab}(P)$ d'un point $P \in T$ agit sur l'ensemble $\pi_0(T \setminus \{P\})$ des directions en P . L'indice géométrique d'un point $P \in T$ est :

$$\text{ind}_{\text{geo}}(P) = \#(\pi_0(T \setminus \{P\})/\text{Stab}(P)) + 2 \text{rg}(\text{Stab}(P)) - 2$$

où $\text{rg}(\text{Stab}(P))$ désigne le rang du stabilisateur de P . Cet indice est toujours positif ou nul car il n'y a pas de point de valence 1 dans un arbre minimal. Il est constant sur l'orbite de P . On définit l'indice géométrique de T comme la somme des indices locaux sur toutes les orbites :

$$\text{ind}_{\text{geo}}(T) = \sum_{[P] \in T/\mathbb{F}_N} \text{ind}_{\text{geo}}(P).$$

Théorème 3.1 (Gaboriau-Levitt [GL95]). *L'indice géométrique d'un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ est majoré par $2N - 2$:*

$$\text{ind}_{\text{geo}}(T) \leq 2N - 2.$$

De plus il y a égalité si et seulement si T est géométrique.

⁶On note l'action de \mathbb{F}_N sur T comme une action à gauche, ce qui implique de noter l'action des isométries partielles sur K comme une action à droite.

⁷L'indice géométrique est appelé simplement *indice* dans [GL95].

Cependant, la stratégie consistant à travailler sur les arbres géométriques, puis à étendre les résultats obtenus pour les arbres géométriques à tous les arbres de \overline{cv}_N par approximation trouve parfois ses limites. Par exemple, les résultats de Damien Gaboriau sur les bouts des orbites d'un système d'isométries [Gab96] peuvent facilement s'interpréter sur l'arbre géométrique associé au système. En revanche, on voit difficilement comment étendre ces résultats à des arbres non géométriques par approximation par des arbres géométriques... Idéalement, il serait donc utile de pouvoir représenter tout arbre par un système d'isométries. C'est ce que nous avons voulu faire avec Thierry Coulbois et Martin Lustig, et que je vais expliquer maintenant.

3.2 Cœur compact

Considérons un arbre $T \in \overline{cv}_N$ et une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N . On rappelle que $C_{\mathcal{A}}(1)$ désigne le cylindre unité de $\partial^2\mathbb{F}(\mathcal{A})$:

$$C_{\mathcal{A}}(1) = \{(X, Y) \in \partial^2\mathbb{F}(\mathcal{A}) \mid \text{le préfixe commun à } X \text{ et } Y \text{ est trivial}\}.$$

Le cylindre unité $C_{\mathcal{A}}(1)$ correspond donc aux chemins bi-infinis réduits passant par la sommet 1 dans la graphe de Cayley de \mathbb{F}_N relatif à la base \mathcal{A} . C'est un compact de $\partial^2\mathbb{F}(\mathcal{A})$ (en fait, c'est un ensemble de Cantor).

L'ensemble limite relatif à la base \mathcal{A} de T est :

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}^2(L(T) \cup C_{\mathcal{A}}(1)).$$

La continuité de \mathcal{Q}^2 (Proposition 2.14) entraîne que $\Omega_{\mathcal{A}}$ est un compact de \overline{T} .

On définit le *cœur compact* $K_{\mathcal{A}}$ de T (relativement à la base \mathcal{A}) comme l'enveloppe convexe de $\Omega_{\mathcal{A}}$ dans \overline{T} . C'est un sous-arbre compact de \overline{T} .

Etant donné $a \in \mathcal{A}$, on considère l'isométrie partielle, que l'on note encore a , qui est la restriction à $K_{\mathcal{A}}$ de l'isométrie a^{-1} de \overline{T} :

$$\begin{aligned} a : K_{\mathcal{A}} \cap aK_{\mathcal{A}} &\rightarrow K_{\mathcal{A}} \cap a^{-1}K_{\mathcal{A}} \\ x &\mapsto x.a = a^{-1}x. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système d'isométries $S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$. On montre que :

Théorème 3.2 ([CHL09]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. Soit \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N , $K_{\mathcal{A}}$ le cœur compact de T relatif à \mathcal{A} et $S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ le système d'isométries associé. Alors :*

- (i) $S_{\mathcal{A}}$ est à générateurs indépendants.

(ii) Pour tout élément $X \in \partial \mathbb{F}_N$, $\mathcal{Q}(X) = P \in K_{\mathcal{A}}$ si et seulement si X est admissible et $\{P\} = \text{dom}(X)$. En particulier :

$$L_{\text{adm}}(S_{\mathcal{A}}) = L(T) \cap C_{\mathcal{A}}(1).$$

Le système d'isométries $S_{\mathcal{A}}$ est remarquable parce qu'il code complètement l'arbre T . Si K est un sous-arbre compact de \overline{T} , on désigne par \mathcal{K} le système d'isométries obtenu en considérant les restrictions à K des éléments de \mathcal{A} : $\mathcal{K} = (K, \mathcal{A})$. On obtient plus précisément le :

Théorème 3.3 ([CHL09]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. Soit \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N . Le cœur compact de T relatif à la base \mathcal{A} est l'unique sous-arbre compact $K_{\mathcal{A}}$ de \overline{T} tel que pour tout sous-arbre compact K de \overline{T} , on a :*

$$T = T_{\mathcal{K}}^{\min} \iff K_{\mathcal{A}} \subseteq K.$$

(On rappelle qu'un arbre T muni d'une action par isométries de \mathbb{F}_N admet un unique sous-arbre minimal invariant, que l'on note T^{\min} , qui est la réunion des axes des isométries hyperboliques de T .)

Les Théorèmes 3.2 et 3.3 ouvrent la possibilité d'étudier directement les arbres de \overline{cv}_N en les codant par un système d'isométries : on n'a plus besoin de les approcher par des arbres géométriques. Je vais expliquer par la suite le type de résultat que l'on a pu obtenir, et mentionner quelques projets qui semblent accessibles grâce à cette nouvelle approche. Mais auparavant, je mentionne deux corollaires assez directs des Théorèmes 3.2 et 3.3, qui concernent les arbres géométriques.

Corollaire 3.4 ([CHL09]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) T est géométrique,
- (ii) il existe une base \mathcal{A} telle que le cœur compact $K_{\mathcal{A}}$ est un sous-arbre fini de \overline{T} ,
- (iii) pour toute base \mathcal{A} , le cœur compact $K_{\mathcal{A}}$ est un sous-arbre fini de \overline{T} .

Corollaire 3.5 ([CHL09]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre à orbites denses, et soit \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N . Il existe une suite $K(n)$ de sous-arbres finis de T de diamètres uniformément bornés telle que*

$$\overline{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mathcal{K}(n)}$$

où $\mathcal{K}(n)$ est le système d'isométries $(K(n), \mathcal{A})$.

3.3 \mathcal{Q} -indice d'un arbre et induction de Rips

3.3.1 Le \mathcal{Q} -indice d'un arbre

Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre à orbites denses. On va maintenant définir le \mathcal{Q} -indice de T . Pour cela, comme pour l'indice géométrique, on commence par définir un indice local. Rappelons que le stabilisateur $\text{Stab}(P)$ d'un point $P \in T$ agit sur la fibre $\mathcal{Q}^{-1}(P)$ de l'application \mathcal{Q} . Le \mathcal{Q} -indice d'un point $P \in T$ est :

$$\text{ind}_{\mathcal{Q}}(P) = \#(\mathcal{Q}^{-1}(P)/\text{Stab}(P)) + 2 \text{rg}(\text{Stab}(P)) - 2.$$

où $\text{rg}(\text{Stab}(P))$ désigne le rang du stabilisateur de P . Cet indice est constant sur l'orbite de P . On définit le \mathcal{Q} -indice de T par :

$$\text{ind}_{\mathcal{Q}}(T) = \sum_{[P] \in \widehat{T}/\mathbb{F}_N} \max(0; \text{ind}_{\mathcal{Q}}(P)).$$

Le \mathcal{Q} -indice d'un arbre T peut-être pensé comme l'indice de la lamination duale $L(T)$. Dans le cas d'une action libre, le \mathcal{Q} -indice d'un point P de T devient :

$$\text{ind}_{\mathcal{Q}}(P) = \#(\mathcal{Q}^{-1}(P)) - 2.$$

Les fibres de \mathcal{Q} qui contribuent à l'indice de T sont donc celles qui sont de cardinal au moins 3 : elles correspondent aux feuilles "singulières" de $L(T)$.

Pour un arbre dual à une lamination géodésique sur une surface, le \mathcal{Q} -indice et l'indice géométrique sont égaux, déjà au niveau local : un point de branchement de valence n dans l'arbre correspond à un n -gone idéal dans le complémentaire de la lamination géodésique, donc à n points dans $\partial\mathbb{F}_N$ vu comme le bord du revêtement universel de la surface.

On obtient un analogue du Théorème 3.1 :

Théorème 3.6 (Coulbois-Hilion [CH10]). *Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre à orbites denses. Alors :*

$$\text{ind}_{\mathcal{Q}}(T) \leq 2N - 2.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si T est contenu dans l'ensemble limite Ω .

On rappelle que $\Omega = \mathcal{Q}^2(L(T)) \subseteq \overline{T}$.

Le Théorème 3.6 montre en particulier que dans le cas d'une action libre, l'application \mathcal{Q} est à fibres finies. Cela répond à une question de Gilbert Levitt et Martin Lustig.

La stratégie mise en œuvre pour prouver le Théorème 3.6 consiste à lire le \mathcal{Q} -indice d'un arbre T sur le système d'isométries $S = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ qui code T . Pour

cela, on utilise la *machine de Rips* pour les systèmes d'isométries, en généralisant l'approche classique développée par Damien Gaboriau, Gilbert Levitt et Frédéric Paulin [Gab96, GLP94] ou par Mladen Bestvina et Mark Feighn [BF95]. On définit alors l'indice d'un système d'isométries et on montre qu'il est invariant par induction de Rips. Enfin, en "poussant l'induction de Rips à la limite", on montre que l'indice du système d'isométrie est égal au \mathcal{Q} -indice de l'arbre. J'explique un peu plus en détails ci-après en quoi consiste l'induction de Rips.

3.3.2 Induction de Rips

Etant donné un système d'isométries $S_0 = (F_0, A_0)$, un pas élémentaire de l'induction de Rips va produire un nouveau système d'isométries $S_1 = (F_1, A_1)$. La forêt F_1 est le sous-ensemble de F_0 formé des points qui sont dans le domaine d'au moins deux isométries distinctes de $A_0^{\pm 1}$:

$$F_1 = \{P \in F_0 \mid \exists a \neq b \in A_0^{\pm 1}, P \in \text{dom}(a) \cap \text{dom}(b)\}.$$

Pour chaque isométrie $a \in A_0$ et pour chaque paire de composantes connexes K, K' de F_1 , on considère l'isométrie partielle $K \upharpoonright a \upharpoonright K'$, qui est la restriction de a à K dans le domaine et à K' dans l'image. L'ensemble A_1 consiste de toutes les isométries partielles non vides ainsi obtenues. Les éléments de A_1 sont naturellement étiquetés par les éléments de A_0 dont ils proviennent.

On obtient un morphisme de graphes étiquetés $\tau_0 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ entre le graphe $\Gamma_1 = \Gamma_{S_1}$ du système S_1 et celui $\Gamma_2 = \Gamma_{S_2}$ du système S_2 .

Dans [CH10], on étudie en détail comment évolue un système d'isométries et le graphe associé lorsqu'on itère l'induction de Rips. Un cas particulier, celui des systèmes d'isométries *réduits*, mérite une attention spéciale. Je renvoie à [CH10] pour les détails sur les systèmes réduits, et je ne précise ici que quelques points. On obtient que [CH10, Propositions 3.13, 3.14 et 5.6] :

- Si le système S_0 est réduit, alors le système S_1 produit par induction de Rips à partir de S_0 est encore réduit.
- Dans ce cas, le morphisme $\tau_0 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ est alors un pliage au sens de Stallings (cf [Sta83]).
- Si $T \in \overline{\text{cv}}_N$ est un arbre à orbites denses, et \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N , le système $S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ associé au cœur compact de T est réduit.

Lorsque $T \in \overline{\text{cv}}_N$ est un arbre à orbites denses, et \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N , on considère donc le système $S_0 = S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$, et on itère l'induction de Rips : on obtient une suite $S_n = (F_n, A_n)$ de systèmes, une suite Γ_n de graphes associés et une suite de morphismes de graphes $\tau_n : \Gamma_{n+1} \rightarrow \Gamma_n$. Le graphe Γ_0 est une rose à N arêtes. On vérifie alors que les graphes Γ_n n'ont pas de sommet de valence 0 ou 1, et que les morphismes τ_n sont des équivalences d'homotopie. On fait face à une alternative :

Cas I : la machine de Rips s'arrête : il existe n_0 tel que $S_{n_0+1} = S_{n_0}$ – on dit alors que $S_0 = S_{\mathcal{A}}$ est de *type surface* ;

Cas II : la machine de Rips tourne indéfiniment.

On montre que cette alternative est indépendante du choix de la base \mathcal{A} : elle ne dépend que de $T \in \overline{\text{cv}}_N$.

Dans le Cas I, on dit que T est de *type surface*. On montre alors que dans le système $S_{n_0} = (F_{n_0}, A_{n_0})$, tous les points de F_{n_0} , sauf un nombre fini, appartiennent à exactement deux domaines d'isométries de $A_{n_0}^{\pm 1}$ [CH10, Proposition 4.3].

Remarque 3.7. Ce dernier point est particulièrement délicat à démontrer. En effet, $K_{\mathcal{A}}$ n'étant pas fini en général, mais seulement compact, le volume de $K_{\mathcal{A}}$ est a priori infini (j'entend par volume de $K_{\mathcal{A}}$ la borne supérieure des volumes des sous-arbres finis de $K_{\mathcal{A}}$). En fait, on connaît des cas où le volume de $K_{\mathcal{A}}$ est infini. On ne peut donc pas utiliser un argument de volume comme dans [GLP94, Proposition 6.1] (voir aussi [Lev93, Corollaire II.5]).

Rappelons la définition de l'indice d'un graphe sans sommet de valence 0 ou 1. On considère un graphe Γ , et x un sommet de Γ de valence $\text{val}(x)$ supérieure ou égale à 2. On définit l'indice de x par : $i(x) = \text{val}(x) - 2$. Si Γ est un graphe sans sommet de valence 0 ou 1, on définit l'indice de Γ comme étant : $i(\Gamma) = \sum_{x \in V(\Gamma)} i(x)$ où $V(\Gamma)$ désigne l'ensemble des sommets de Γ . Si Γ est un graphe fini, $i(\Gamma)$ s'exprime simplement à partir de la caractéristique d'Euler $\chi(\Gamma)$ de Γ : $i(\Gamma) = -2\chi(\Gamma)$.

Revenons maintenant à notre induction de Rips sur $S_0 = S_{\mathcal{A}}$. On est amené à considérer le *graphe limite* $\widehat{\Gamma}$ du système $S_0 = S_{\mathcal{A}}$. C'est la limite inverse des graphes Γ_n :

$$\widehat{\Gamma} = \varprojlim \Gamma_n.$$

L'ensemble limite $\Omega_{S_0} = \Omega_{\mathcal{A}}$ de $S_0 = S_{\mathcal{A}}$ est l'ensemble des points de $F_0 = K_{\mathcal{A}}$ qui appartiennent au domaine d'un chemin bi-infini réduit admissible de Γ . De manière équivalente, $\Omega_{\mathcal{A}}$ est l'intersection des F_n :

$$\Omega_{\mathcal{A}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

On peut décrire $\widehat{\Gamma}$ comme le graphe dont les sommets sont les composantes connexes de $\Omega_{\mathcal{A}}$ et dont les arêtes sont toutes les restrictions possibles des isométries partielles de $A_0 = \mathcal{A}$ aux composantes connexes de $\Omega_{\mathcal{A}}$.

On montre que le \mathcal{Q} -indice de l'arbre est égal à l'indice du graphe limite $\widehat{\Gamma}$, voir [CH10, Théorème 5.7]. Dans le Cas I, on voit que $\widehat{\Gamma} = \Gamma_{n_0}$, et par conséquent $i(\widehat{\Gamma}) = \chi(\Gamma_{n_0}) = 2N - 2$. Dans le Cas II, on montre que $i(\widehat{\Gamma}) < 2N - 2$ [CH10, Théorème 4.8].

Attardons nous sur un cas particulier du Cas II. On dit que $S_{\mathcal{A}}$ est de *type Levitt* si $\Omega_{\mathcal{A}}$ est totalement discontinu. On montre que le fait que $S_{\mathcal{A}}$ est de type Levitt ne dépend pas de la base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N , mais seulement de $T \in \overline{cv}_N$. On dit, dans ce cas, que l'arbre T est de type Levitt. Si l'on réalise la suspension⁸ du système $S_{\mathcal{A}}$, et que l'on effectue l'induction de Rips sur cette suspension (en “creusant les bandes” au-dessus des bases supprimées lors du passage de F_n à F_{n+1}), l'objet obtenu à la limite est une réalisation géométrique du graphe $\widehat{\Gamma}$.

3.3.3 Botanique des arbres mélangeants

Il y a plusieurs notions de “minimalité” possibles pour décrire la dynamique de \mathbb{F}_N sur un arbre $T \in \overline{cv}_N$. On doit à John Morgan la notion d'arbre mélangeant⁹ [Mor88]. Un arbre $T \in \overline{cv}_N$ est *mélangeant* si pour toute paire de segments I, J non triviaux de T , il existe $g_1, g_2, \dots, g_k \in \mathbb{F}_N$ tels que $J \subseteq g_1 I \cup g_2 I \cup \dots \cup g_k I$.

Proposition 3.8 ([CH10]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre mélangeant. Alors T est soit de type surface, soit de type Levitt.*

Le tableau 2.1 résume les résultats de [CH10] concernant les arbres mélangeants, et introduit la terminologie d'arbre pro-surface, d'arbre pseudo-surface et d'arbre pseudo-Levitt.

4 Conséquences

4.1 Une classification qualitative des automorphismes à puissances irréductibles

Un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ agit sur les classes de conjugaison de facteur libre de \mathbb{F}_N . On dit que Φ est à *puissances irréductibles*, ou *iwip*, s'il n'existe pas de (classe de conjugaison de) facteur libre propre non trivial de \mathbb{F}_N laissé(e) fixe par une puissance positive de Φ . Cela revient aussi à dire que les automorphismes dans la classe extérieure de Φ sont à puissances irréductibles comme défini dans la Section 2.3.2

Gilbert Levitt et Martin Lustig étudient dans [LL03] la dynamique d'un automorphisme extérieur *iwip* $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ sur la compactification \overline{CV}_N de l'Outre-espace CV_N . Ils montrent qu'un automorphisme extérieur *iwip* $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ a

⁸Pour les arbres géométriques, cette suspension est un 2-complexe feuilleté que l'on appelle aussi *complexe de bandes*. On parlera encore de complexe de bandes pour des arbres non géométriques, même si dans ce cas la suspension n'est pas un 2-complexe.

⁹*mixing tree* en anglais.

| | | géométrique | non géométrique |
|-----------------|--|---------------------------------------|---|
| | | $K_{\mathcal{A}}$ est un arbre fini | $K_{\mathcal{A}}$ n'est pas un arbre fini |
| | | \Updownarrow | \Updownarrow |
| | | $\text{ind}_{\text{geo}}(T) = 2N - 2$ | $\text{ind}_{\text{geo}}(T) < 2N - 2$ |
| type Surface | Ω est un arbre ($T \subset \Omega$) \Updownarrow $\Omega_{\mathcal{A}}$ est une forêt finie \Updownarrow $\text{ind}_{\mathcal{Q}}(T) = 2N - 2$ | pro-surface | pseudo-surface |
| type Levitt | Ω est totalement discontinu \Updownarrow $\Omega_{\mathcal{A}}$ est totalement discontinu \Updownarrow $\text{ind}_{\mathcal{Q}}(T) < 2N - 2$ | Levitt | pseudo-Levitt |

TAB. 2.1 – *Botanique des arbres mélangeants : relations entre indice géométrique, caractère géométrique de l'arbre, \mathcal{Q} -indice et ensemble limite de l'arbre.* Rappelons que l'ensemble limite $\Omega_{\mathcal{A}}$ du système $S_{\mathcal{A}}$ est un compact de $\overline{T} : \Omega_{\mathcal{A}} = \mathcal{Q}^2(L(T) \cap C_{\mathcal{A}}(1)) \subset \overline{T}$. L'ensemble limite $\Omega = \mathcal{Q}^2(L(T)) \subseteq \overline{T}$ de T s'identifie à l'orbite $\mathbb{F}_N \cdot \Omega_{\mathcal{A}}$ de $\Omega_{\mathcal{A}}$ sous \mathbb{F}_N .

une dynamique Nord-Sud sur $\overline{\text{CV}}_N$. En particulier, l'automorphisme extérieur *iwip* $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ a exactement deux points fixes $T_{\Phi}, T_{\Phi^{-1}} \in \partial \text{CV}_N$, le premier attractif et le second répulsif.

Damien Gaboriau, Andre Jaeger, Gilbert Levitt et Martin Lustig ont introduit dans [GJLL98] l'indice $\text{ind}(\Phi)$ d'un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$. Cet indice est défini à partir d'éléments caractéristiques des automorphismes $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ dans la classe extérieure de Φ (le rang du sous-groupe fixe des automorphismes $\varphi \in \Phi$, le nombre de points attractifs pour $\varphi \in \Phi$ au bord $\partial \mathbb{F}_N \dots$).

Si $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ est un automorphisme extérieur *iwip*, quitte à remplacer Φ par une puissance, l'indice de Φ peut s'interpréter en terme de l'indice géométrique de l'arbre attractif T_{Φ} et du \mathcal{Q} -indice de l'arbre répulsif $T_{\Phi^{-1}}$.

Proposition 4.1 ([GJLL98, CH10]). *Soit $\Psi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ un automorphisme extérieur iwip. Il existe une puissance $\Phi = \Psi^k$ ($k > 0$) de Ψ pour laquelle :*

$$2 \text{ind}(\Phi) = \text{ind}_{\text{geo}}(T_{\Phi}) = \text{ind}_{\mathcal{Q}}(T_{\Phi^{-1}})$$

où T_{Φ} est l'arbre attractif de Φ (et de Ψ) et $T_{\Phi^{-1}}$ son arbre répulsif.

La première égalité de la proposition découle de la quatrième partie de [GJLL98], la seconde égalité fait l'objet de la Proposition 6.6 et du Théorème 6.7 de [CH10].

D'autre part, on montre que l'arbre attractif T_Φ d'un automorphisme extérieur *iwip* Φ est mélangeant. En fait, on montre une propriété plus forte. Un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ est *indécomposable* si pour toute paire de segments I, J non triviaux de T , il existe $g_1, g_2, \dots, g_k \in \mathbb{F}_N$ tels que $J \subseteq g_1 I \cup g_2 I \cup \dots \cup g_k I$ et $g_i I \cup g_{i+1} I$ contient un arc non trivial (pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$). Cette définition est due à Vincent Guirardel [Gui08].

Proposition 4.2 ([CH10]). *L'arbre attractif T_Φ d'un automorphisme extérieur à puissances irréductibles $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ est indécomposable.*

La preuve de cette proposition utilise de manière cruciale le fait que les graphes de Whitehead des sommets d'une application de réseaux ferroviaires¹⁰ à puissances irréductibles (voir [BH92]) sont connexes (voir [BFH97b, BFH97a]).

Le théorème qui suit découle des Propositions 4.1 et 4.2, et des résultats sur les arbres mélangeants résumés dans le tableau 2.1.

Théorème 4.3 ([CH10]). *Soit $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ un automorphisme extérieur à puissances irréductibles. Soient T_Φ son arbre attractif et $T_{\Phi^{-1}}$ son arbre répulsif. L'une des trois situations suivantes se produit :*

- (i) T_Φ et $T_{\Phi^{-1}}$ sont pro-surfaces ;
- (ii) T_Φ est Levitt et $T_{\Phi^{-1}}$ est pseudo-surface (ou $T_{\Phi^{-1}}$ est Levitt and T_Φ est pseudo-surface) ;
- (iii) T_Φ et $T_{\Phi^{-1}}$ sont pseudo-Levitt.

On dit qu'un automorphisme extérieur Φ est *géométrique* lorsqu'il est induit par un homéomorphisme d'une surface avec une composante de bord. Un résultat de Vincent Guirardel [Gui05] et de Michael Handel et Lee Mosher [HM07] montre qu'un automorphisme extérieur *iwip* est dans le cas (i) du Théorème 4.3 si et seulement s'il est géométrique (et dans ce cas, l'homéomorphisme est pseudo-Anosov).

On dit que Φ est *paragéométrique* si T_Φ est géométrique et Φ n'est pas géométrique. Il résulte du Théorème 4.3 qu'on est alors précisément dans la situation (ii).

Lorsque ni T_Φ ni $T_{\Phi^{-1}}$ sont géométriques, il résulte du Théorème 4.3 que l'on est précisément dans la situation (iii). Dans ce cas, il nous semble naturel de dire que Φ est *pseudo-Levitt*.

Le tableau 2.2 synthétise les résultats liant la nature d'un automorphisme extérieur *iwip*, son indice et celui de son inverse, et la nature de ses arbres attractifs et répulsifs.

¹⁰une application *train-track*

| Automorphismes | Arbres | Indices |
|---|--|---|
| Φ géométrique \Leftrightarrow \Uparrow Φ^{-1} géométrique \Leftrightarrow | T_Φ et $T_{\Phi^{-1}}$ géométrique \Leftrightarrow \Uparrow T_Φ pro-surface \Leftrightarrow \Uparrow $T_{\Phi^{-1}}$ pro-surface | $\Leftrightarrow \text{ind}(\Phi) = \text{ind}(\Phi^{-1}) = N - 1$ |
| Φ paragéométrique \Leftrightarrow | $\begin{cases} T_\Phi \text{ géométrique} \\ \text{and} \\ T_{\Phi^{-1}} \text{ non géométrique} \end{cases} \Leftrightarrow$ \Uparrow T_Φ Levitt \Leftrightarrow \Uparrow $T_{\Phi^{-1}}$ pseudo-surface | $\begin{cases} \text{ind}(\Phi) = N - 1 \\ \text{and} \\ \text{ind}(\Phi^{-1}) < N - 1 \end{cases}$ |
| Φ pseudo-Levitt \Leftrightarrow \Uparrow | T_Φ et $T_{\Phi^{-1}}$ non géométrique \Leftrightarrow \Uparrow | |
| Φ^{-1} pseudo-Levitt \Leftrightarrow | T_Φ pseudo-Levitt \Leftrightarrow \Uparrow $T_{\Phi^{-1}}$ pseudo-Levitt | $\begin{cases} \text{ind}(\Phi) < N - 1 \\ \text{and} \\ \text{ind}(\Phi^{-1}) < N - 1 \end{cases}$ |

TAB. 2.2 – Classification des automorphismes iwip.

Un automorphisme extérieur *iwip* $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ a un *coefficient de dilatation* $\lambda_\Phi > 1$: c'est son taux de croissance exponentielle (voir section 4.3 chapitre 3). De manière alternative, si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est dans la classe extérieure Φ , alors $\lambda_\Phi = \lambda_\varphi$ où λ_φ est le facteur de dilatation de φ qui intervient dans le Fait 2.16.

Lorsque Φ est géométrique, le coefficient de dilatation de Φ est égal au coefficient de dilatation de l'homéomorphisme pseudo-Anosov associé. En particulier : $\lambda_\Phi = \lambda_{\Phi^{-1}}$.

Michael Handel et Lee Mosher montrent dans [HM07] que si Φ est paragéométrique, alors $\lambda_\Phi > \lambda_{\Phi^{-1}}$.

Si Φ est pseudo-Levitt, les coefficients de dilatation de Φ et Φ^{-1} sont parfois égaux, et parfois ne le sont pas. En effet, on trouve dans l'introduction de [HM07] un exemple explicite d'automorphisme extérieur Φ non géométrique tel que $\lambda_\Phi = \lambda_{\Phi^{-1}}$: cet automorphisme est donc, en particulier, pseudo-Levitt. D'autre part, on connaît des exemples d'automorphismes pseudo-Levitt Φ tels que $\lambda_\Phi > \lambda_{\Phi^{-1}}$. C'est le cas de la classe extérieure Φ de $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_3)$ défini par $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = ac$, $\varphi(c) = a$ (où (a, b, c) est une base de \mathbb{F}_3). On calcule en effet que $\text{ind}(\Phi^6) = 3/2 < 2$, $\text{ind}(\Phi^{-6}) = 1/2 < 2$, $\lambda_\Phi \simeq 1,32 < \lambda_{\Phi^{-1}} \simeq 1,46$. De plus $\text{ind}(\Phi^6) = \text{ind}(\Phi^{6k})$ et $\text{ind}(\Phi^{-6}) = \text{ind}(\Phi^{-6k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ paragéométrique vérifie que, quitte à le remplacer par une puissance (strictement positive), $\lambda_\Phi > \lambda_{\Phi^{-1}}$ et $\text{ind}(\Phi) > \text{ind}(\Phi^{-1})$. L'exemple ci-dessus montre en revanche que pour automorphisme extérieur pseudo-Levitt Φ on peut avoir $\lambda_\Phi > \lambda_{\Phi^{-1}}$ et $\text{ind}(\Phi) < \text{ind}(\Phi^{-1})$ (même en s'autorisant à remplacer Φ par une puissance (strictement positive)).

Bien que je ne connaisse pas de résultat établissant la genericité, dans quelque sens que l'on puisse donner, des automorphismes extérieurs *iwip* dans $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$, il semble assez attendu des spécialistes que ce soit le cas. Au vu de la discussion précédente, on peut se demander, avec Michael Handel et Lee Mosher :

Question 4.4. *Les automorphismes extérieurs pseudo-Levitt qui ont un coefficient de dilatation différent de celui de leur inverse sont-ils génériques dans $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$?*

4.2 Induction de Rauzy-Veech

4.2.1 Où commencer à inciser ?

On a vu que l'induction de Rips est un outil qui permet, dans d'un système d'isométries pseudo-Levitt, d'obtenir une représentation géométrique de la lamination admissible du système : c'est "ce qui reste" du complexe de bandes à la limite.

Dans le cas d'un système d'isométries pro-surface (on ne trompe quasiment pas son intuition en pensant à un échange d'intervalles), il existe aussi des machines

qui donnent, lorsqu'on itère jusqu'à la limite, une représentation géométrique de la lamination admissible. C'est le cas, par exemple, de l'induction de Rauzy-Veech [Vee78, Rau79, Yoc09]. Nous allons, sans décrire en détail cette induction, en donner une description sommaire. L'idée est d'inciser le complexe de bandes au niveau de la singularité du feuilletage vertical la plus à droite sur l'intervalle jusqu'à revenir sur l'intervalle – voir figure 1.

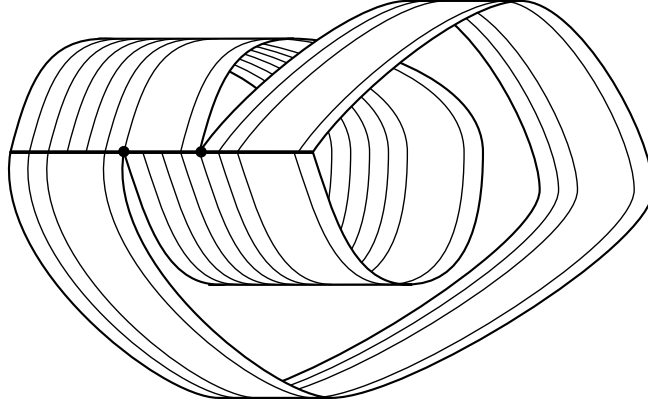


Fig. 1 – *Complexe de bandes feuilleté, obtenu par suspension d'un échange de deux intervalles.* Il y a deux points de brèche : ce sont les deux points marqués sur l'intervalle horizontal. Un pas élémentaire de l'induction de Rauzy-Veech consiste à inciser le complexe de bande le long d'une feuille du feuilletage, à partir du point de brèche le plus à droite sur l'intervalle horizontal, jusqu'à revenir sur l'intervalle horizontal.

On aimerait avoir une telle machine qui fonctionne aussi dans le cas d'un système d'isométries $S = (F, A)$ pseudo-surface. C'est que nous avons voulu mettre en place avec Thierry Coulbois et Patrick Reynolds [CHR11]. La difficulté est de savoir où commencer à inciser pour ne pas “casser” lors de l'incision certaines feuilles bi-infinies et modifier, de la sorte, la lamination admissible du système d'isométries. Plus exactement, on souhaite que l'incision soit une équivalence d'homotopie. Le fait que la base est un arbre, avec des points de branchements, complique la combinatoire locale et rend les choses moins évidentes que pour un échange d'intervalles.

Soit x un point de F : on désigne par F_x la composante connexe de F qui contient x . On montre qu'un point $x \in F$ où commencer à inciser doit vérifier les propriétés suivantes :

- x n'est pas un point extrémal de K_x ;
- il existe une isométrie partielle $a_0 \in A^{\pm 1}$ définie en x telle que x est un point extrémal du domaine $\text{dom}(a_0)$ de a_0 et $\text{dom}(a_0)$ ne se réduit pas à x ; on note d_x la direction en x qui intersecte $\text{dom}(a_0)$;

- il existe une unique isométrie $a_1 \in A^{\pm 1} \setminus \{a_0\}$ définie en x telle que $\text{dom}(a_1)$ intersecte d_x ;
- x n'est pas un point extrémal de $\text{dom}(a_1)$.

Un point $x \in F$ qui satisfait ces condition s'appelle un *point de brèche* de S . Le problème devient alors de montrer l'existence de points de brèche.

Proposition 4.5 ([CHR11]). *Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre de type surface. Soit \mathcal{A} une base de \mathbb{F}_N . Le système d'isométries $S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ possède un point de brèche.*

Comme on l'a expliqué avant, pour les arbres pro-surfaces, l'existence d'un point de brèche ne pose pas vraiment problème. Pour les arbres pseudo-surfaces, on utilise de manière cruciale que les indices d'un arbre pseudo-surface vérifient l'inégalité stricte $\text{ind}_{\mathcal{Q}}(T) > \text{ind}_{\text{geo}}(T)$, qui résulte des Théorèmes 3.1 et 3.6.

La Proposition 4.5 nous permet d'effectuer un pas élémentaire de l'induction de Rauzy-Veech, sans “casser” de feuilles de $L(T)$, et nous assure que l'on peut ensuite itérer l'induction de Rauzy-Veech. Comme pour l'induction de Rips, on obtient une suite Γ_n de graphes étiquetés par \mathcal{A} , et une suite de morphismes de graphes étiquetés $\tau_n : \Gamma_{n+1} \rightarrow \Gamma_n$, dont on peut considérer la limite inverse $\hat{\Gamma} = \varprojlim \Gamma_n$. Pour éviter “d'oublier une partie du système d'isométries”, on peut décider d'inciser au niveau de chaque point de brèche à chaque itération. Ici encore, le graphe limite $\hat{\Gamma}$ représente la lamination duale à T (en tant que lamination symbolique dans la base \mathcal{A}).

4.2.2 Minimalité de la lamination duale à un arbre indécomposable

Une lamination algébrique $L \in \Lambda(\mathbb{F}_N)$ est *minimale* si l'orbite sous \mathbb{F}_N de toute feuille de L est dense dans L . Cela est équivalent à dire que la lamination symbolique $L_{\mathcal{A}}$ dans la base \mathcal{A} associée est minimale : l'orbite sous le décalage de toute feuille de $L_{\mathcal{A}}$ est dense dans $L_{\mathcal{A}}$.

J'ai déjà mentionné qu'on pouvait donner plusieurs notions de “minimalité” pour un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$, notamment :

1. T est à orbites denses,
2. T est mélangeant (voir section 3.3.3),
3. T est indécomposable (voir section 4.1),

les conditions étant de plus en plus fortes dans cette liste. Les arbres indécomposables jouent le rôle de briques fondamentales à partir desquelles on peut reconstruire tout arbre [Lev94, Gui08, GL].

Il est naturel de se demander quels sont les liens entre la “minimalité” d'un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ et la minimalité de sa lamination duale $L(T)$.

Il nous faut introduire un peu de vocabulaire. Une ligne $(X, Y) \in \partial^2 \mathbb{F}_N$ est une feuille diagonale d'une lamination L s'il existe un nombre fini de points X_1 ,

$X_2, \dots, X_k \in \partial \mathbb{F}_N$ tels que $X = X_1$, $Y = X_k$ et $(X_i, X_{i+1}) \in L$ pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Une lamination est *diagonalement close* si elle contient toutes ses feuilles diagonales. Par exemple, la lamination algébrique $L(\mathfrak{L})$ d'une lamination géodésique \mathfrak{L} sur une surface à bord (voir section 1.1) n'est pas diagonalement close s'il y a des n -gones idéaux, avec $n \geq 4$, dans le complémentaire de \mathfrak{L} . En revanche, la lamination $L(T)$ duale à un arbre $T \in \overline{cv}_N$ est toujours diagonalement close.

Cela nous amène à introduire la terminologie suivante. Une lamination L est *diagonalement minimale* si :

- L a une unique sous-lamination minimale $L_0 \subseteq L$,
- $L \setminus L_0$ consiste d'un nombre fini d'orbites de feuilles, et chacune de ces feuilles est une feuille diagonale de L_0 .

Enfin, rappelons que si H est un sous-groupe quasi-convexe de \mathbb{F}_N (par exemple, un sous-groupe de type fini), alors le bord ∂H de H se plonge naturellement dans le bord $\partial \mathbb{F}_N$ de \mathbb{F}_N . On dit qu'une ligne $(X, Y) \in \partial^2 \mathbb{F}_N$ est *portée par H* si $(X, Y) \in \partial^2 H$.

Théorème 4.6 ([CHR11]). *Soit T un arbre de \overline{cv}_N à orbites denses. On suppose que l'action de \mathbb{F}_N sur T est libre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *T est indécomposable,*
- (ii) *la lamination $L(T)$ duale à T est diagonalement minimale,*
- (iii) *aucune feuille de $L(T)$ n'est portée par un sous-groupe de \mathbb{F}_N de type fini et d'indice infini dans \mathbb{F}_N .*

Dans ce cas, l'unique sous-lamination minimale de $L(T)$ est la lamination $L'(T)$ qui est formée des feuilles non isolées de T .

La preuve du Théorème 4.6 repose sur deux ingrédients. Le premier, c'est l'induction de Rips, ou l'induction de Rauzy-Veech, selon que l'arbre T est de type Levitt ou de type surface, qui permet d'approcher $L(T)$ par la suite des graphes Γ_n . Le deuxième ingrédient est la Proposition 4.7 qui suit, due à Patrick Reynolds.

Proposition 4.7 (Reynolds [Rey11]). *Soit $T \in \overline{cv}_N$ un arbre indécomposable. On suppose que l'action de \mathbb{F}_N sur T est libre. Soit H un sous-groupe de type fini de \mathbb{F}_N . Alors H porte une feuille de la lamination $L(T)$ duale à T si et seulement si H est d'indice fini dans \mathbb{F}_N .*

Mladen Bestvina, Mark Feighn et Michael Handel associent à chaque automorphisme extérieur *iwp* $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ une unique *lamination attractive* $L_\Phi^+ \in \Lambda(\mathbb{F}_N)$ [BFH97b, BFH00]. En utilisant la Proposition 4.2, on montre facilement que le Théorème 4.6 a pour corollaire le résultat suivant, initialement prouvé par Martin Lustig et Ilya Kapovich en utilisant des techniques assez poussées de réseaux ferroviaires.

Corollaire 4.8 (Kapovich-Lustig [KL11]). *Soit $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ un automorphisme extérieur à puissances irréductibles, non géométrique. La lamination $L(T_\Phi)$ duale à l'arbre attractif $T_\Phi \in \overline{\text{CV}}_N$ de Φ est diagonalement minimale. Son unique sous-lamination minimale est $L_{\Phi^{-1}}^+$. En particulier, $L(T_\Phi)$ est la clôture diagonale de $L_{\Phi^{-1}}^+$.*

La *clôture diagonale* d'une lamination L est l'adhérence dans $\partial^2 \mathbb{F}_N$ de l'ensemble de toutes les feuilles diagonales de L . C'est encore une lamination, voir [KL11].

4.3 Courants duaux à un arbre

A tout élément $g \in \mathbb{F}_N$ est naturellement associé un courant $\eta_g \in \text{Cour}(\mathbb{F}_N)$ appelé *courant de comptage* ou *courant rationnel* – voir [Kap06]. Martin Lustig et Ilya Kapovich définissent dans [KL09] le nombre d'intersection d'un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ et d'un courant $\mu \in \text{Cour}(\mathbb{F}_N)$:

Théorème 4.9 (Kapovich-Lustig [KL09]). *Soit $N \geq 2$. Il existe une unique application continue*

$$i_{KL} : \overline{\text{cv}}_N \times \text{Cour}(\mathbb{F}_N) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

qui est $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -homogène par rapport à la première variable, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -linéaire par rapport à la seconde variable, $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ -équivariante, et telle que pour tout $T \in \overline{\text{cv}}_N$ et pour tout $g \in \mathbb{F}_N$: $i_{KL}(T, \eta_g) = \|g\|_T$.

L'application $i_{KL} : \overline{\text{cv}}_N \times \text{Cour}(\mathbb{F}_N) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ s'appelle la *forme d'intersection de Kapovich-Lustig*. La forme d'intersection i_{KL} permet d'associer à un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un ensemble de courants, appelés *courants duaux à T* : ce sont les courants $\mu \in \text{Cour}(\mathbb{F}_N)$ tels que $i_{KL}(T, \mu) = 0$. Martin Lustig et Ilya Kapovich obtiennent la caractérisation suivante des courants duaux à un arbre $T \in \overline{\text{cv}}_N$:

Théorème 4.10 (Kapovich-Lustig [KL10]). *Soit $N \geq 2$. Soient $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre et $\mu \in \text{Cour}(\mathbb{F}_N)$ un courant. Alors $i_{KL}(T, \mu) = 0$ si et seulement si $\text{Supp}(\mu) \subseteq L(T)$.*

Au vu du Théorème 4.10, on obtient comme corollaire du Théorème 4.6 :

Corollaire 4.11 ([CHR11]). *Soit $T \in \overline{\text{cv}}_N$ un arbre indécomposable. On suppose que l'action de \mathbb{F}_N sur T est libre. Si ν, ν' sont deux courants duaux à T (c'est à dire que $i_{KL}(T, \nu) = i_{KL}(T, \nu') = 0$) alors $\text{Supp}(\nu) = \text{Supp}(\nu')$ et aucune feuille de $\text{Supp}(\nu)$ n'est portée par un sous-groupe de type fini et d'indice fini dans \mathbb{F}_N (notamment, par un facteur libre propre de \mathbb{F}_N).*

Convaincu par le caractère incontournable du complexe des courbes $\mathcal{C}(S)$ d'une surface S pour l'étude du groupe modulaire $\text{Mod}(S)$ de la surface, les spécialistes de $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ ont cherché un bon analogue du complexe des courbes pour le groupe libre \mathbb{F}_N . Plusieurs analogues ont été proposés – voir par exemple [KL09]. La prépublication récente de Mladen Bestvina et Mark Feighn [BF11] donne une preuve que le complexe des facteurs libres de \mathbb{F}_N est hyperbolique. Le Corollaire 4.11 donne un outil pratique pour étudier la géométrie du graphe d'intersection de [KL09] : c'est un graphe bipartite, dont les sommets sont d'une part des arbres de $\overline{\text{CV}}_N$, d'autre part des classes projectives de courants de $\mathbb{P}\text{Cour}(\mathbb{F}_N)$; un courant et un arbre étant reliés par une arête lorsque leur nombre d'intersection est nul.

L'ensemble des courants duaux à un arbre donné $T \in \overline{\text{CV}}_N$ est stable par combinaison linéaires positives : si $i_{KL}(T, \nu) = i_{KL}(T, \nu') = 0$, alors $i_{KL}(T, a\nu + a'\nu') = 0$ pour tout $a, a' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Quitte à choisir une bonne normalisation, cet ensemble a donc la structure d'un simplexe.

Question 4.12. *Quelle est la dimension du simplexe des courants duaux à un arbre $T \in \overline{\text{CV}}_N$?*

Nous avons le projet, avec Thierry Coulbois, de donner une réponse à cette question. En effet l'induction de Rips-Rauzy-Veech donne un moyen concret de décrire les courants duaux à un arbre $T \in \overline{\text{CV}}_N$ en utilisant des outils classiques de théorie ergodique comme les tours de Kakutani-Rohlin – voir par exemple [Fer97] – ou les diagrammes de Bratteli-Vershik – voir par exemple [BDM10].

4.4 Lignes de dépliage

Pour appréhender la géométrie de $\overline{\text{CV}}_N$ (ou même d'autres complexes dont les sommets sont des arbres) il est utile de disposer d'un ensemble de lignes infinies, ou mieux bi-infinies, dans $\overline{\text{CV}}_N$ qui satisfait de “bonnes conditions”. Je vais rester très informel dans cette section (en particulier, je ne vais pas détailler ici ce que peut entendre par “bonnes conditions” – voir cependant [BF11, AK08]).

Michael Handel et Lee Mosher [HM06], Jérôme Los et Martin Lustig [LL04] ont proposé un système d'axes (d'automorphismes) dans CV_N . Leurs propositions sont différentes, mais reposent sur une idée commune : utiliser des lignes de pliage. Etant donnée une application $f : T_0 \rightarrow T$ qui est \mathbb{F}_N -équivariante et linéaire sur les arêtes, entre un arbre $T_0 \in \text{CV}_N$ et un arbre $T \in \overline{\text{CV}}_N$, on peut définir une structure légale sur T_0 : les tours illégaux dans T sont donnés par les paires d'arêtes (e, e') issues d'un même sommet telles que $f(e)$ et $f(e')$ ont un sous-chemin initial commun non trivial. Ces tours illégaux indiquent où commencer un pliage (au sens de Stallings).

Bien entendu, il y a plusieurs paramètres sur lesquels jouer : le choix des tours où l'on plie, la vitesse à laquelle on plie, etc.

Nous voulons signaler que l'induction de Rips-Rauzy-Veech donne un moyen de créer des *lignes de dépliage* dans \overline{CV}_N . En effet, se donner une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N est équivalente à se donner une rose marquée, donc un certain point T_0 de CV_N . Étant donné un arbre $T \in \overline{CV}_N$ à orbites denses, l'induction de Rips-Rauzy-Veech sur $S_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ permet donc de construire des lignes de dépliage de T_0 vers T . Ici encore, il y a plusieurs paramètres sur lesquels jouer : le choix des points de brèche, la vitesse à laquelle on plie, etc.

Sur CV_N , on n'a pas d'analogues de la métrique de Teichmüller, ou de celle de Weil-Petersson, sur l'espace de Teichmüller d'une surface. Mais on a un analogue de la métrique asymétrique de Thurston : la métrique asymétrique de Lipschitz [FM11]. L'induction de Rauzy-Veech (et ses déclinaisons accélérées, celle d'Anton Zorich notamment) permet de construire des discrétisations des géodésiques de Teichmüller (pour la métrique de Teichmüller), et elle a été utilisée de manière fructueuse pour obtenir des résultats fins sur la dynamique du flot de Teichmüller – on peut consulter [Yoc09] pour plus de détails. Sur CV_N , l'induction de Rips-Rauzy-Veech peut, de même, servir à construire des discrétisations des géodésiques pour la métrique Lipschitz. Les outils développés dans [CH10, CHR11] ouvrent donc la voie à l'étude de la dynamique du flot de Lipschitz sur CV_N .

Automorphismes d'un groupe libre

Dans ce dernier chapitre, je présente des sujets sur lesquels j'ai travaillé et des résultats que j'ai obtenus, sans nécessairement m'attarder sur les détails.

La plupart de ces travaux mettent en jeu des automorphismes du groupe libre. On est amené à utiliser des propriétés structurelles ou dynamiques de ces automorphismes. L'outil incontournable dans ce contexte, ce sont les applications de réseaux ferroviaires¹. Une application de réseau ferroviaire est une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G$ d'un graphe G (connexe, sans sommet de valence 1) dans lui-même, qui envoie les sommets sur des sommets et les arêtes sur des chemins d'arêtes (réduits) et qui satisfait des conditions supplémentaires qui en font tout l'intérêt, et que je ne vais pourtant pas pouvoir détailler ici. Pour les automorphismes du groupe libre, l'article fondateur en matière ferroviaire est le papier de Mladen Bestvina et Michael Handel [BH92].

Un automorphisme à puissances irréductibles se représente avantageusement par une application de réseaux ferroviaires absolue, dont la matrice de transition est primitive. Pour les automorphismes plus généraux, on est amené à utiliser des applications de réseaux ferroviaires relatives². La version relative proposée dans [BH92] ne suffit pas toujours pour arriver à nos fins. Mais des améliorations successives, des versions parallèles, ont été proposées depuis, notamment : les applications de

¹*train-track maps*, en anglais, abrégé en TT.

²*relative train-track maps*, abrégé en RTT.

réseaux ferroviaires relatives améliorées³ [BFH00], les applications de réseaux ferroviaires à faces de Nielsen⁴ [Lus00, Lus01], les applications de β -réseaux ferroviaires⁵ [Lus11], les applications de réseaux ferroviaires relatives complètement scindées⁶ [FH11, HM09].

1 Dynamique d'un automorphisme de \mathbb{F}_N sur le bord

Un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ induit un homéomorphisme $\partial\varphi$ du bord de \mathbb{F}_N et un homéomorphisme $\overline{\varphi}$ de la compactification $\overline{\mathbb{F}}_N = \mathbb{F}_N \cup \partial\mathbb{F}_N$ de \mathbb{F}_N par son bord. On obtient ainsi deux systèmes dynamiques : $(\partial\mathbb{F}_N, \partial\varphi)$ et $(\overline{\mathbb{F}}_N, \overline{\varphi})$ qui ont été beaucoup étudiés [GJLL98, LL00a, LL00b, LL08].

Désignons par $\text{Fix}\varphi$ le sous-groupe de \mathbb{F}_N constitué des éléments laissés fixes par φ , et par $\partial\text{Fix}\varphi$ son bord qui se plonge dans $\partial\mathbb{F}_N$. Gilbert Levitt et Martin Lustig montrent que tout automorphisme de \mathbb{F}_N possède une puissance φ qui satisfait la propriété de *périodicité asymptotique* suivante [LL08] : si $x \notin \text{Fix}\overline{\varphi}$, la suite $\overline{\varphi}^k(x)$ converge vers un point $\omega(x) \in \text{Fix}\partial\varphi$. On note L_φ^+ l'ensemble des points limites ainsi obtenus. Remarquons que $\text{Fix}\varphi$ agit naturellement sur L_φ^+ .

Théorème 1.1 ([Hil04]). *Il existe une constante M_N (qui ne dépend que de N) telle que pour tout automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$, l'ensemble $L_\varphi^+/\text{Fix}\varphi$ des classes modulo $\text{Fix}\varphi$ des points limites de φ est de cardinal au plus M_N . De plus, les éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont tous des points rationnels (c-à-d de la forme u^∞ , avec $u \in \text{Fix}\varphi$, $u \neq 1$).*

On savait déjà contrôler le nombre de classes modulo $\text{Fix}\varphi$ (appelées *classes isoglosses*) d'éléments de L_φ^+ qui ne sont pas dans $\partial\text{Fix}\varphi$, grâce à l'indice de l'automorphisme φ [GJLL98]. La nouveauté du Théorème 1.1 est de contrôler aussi les classes modulo $\text{Fix}\varphi$ d'éléments de L_φ^+ qui sont dans $\partial\text{Fix}\varphi$. La preuve utilise les applications de réseaux ferroviaires relatives améliorées, et comme dans [LL08], une étude fine de l'arbre-invariant associé à la strate supérieure d'une application de réseaux ferroviaires relative.

³*improved train-track maps*, abrégé en IRTT.

⁴*train-tracks with Nielsen faces*.

⁵ *β -train-tracks*.

⁶*completely split relative train-track maps*, abrégé en CT.

2 Orbites paraboliques

Un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ a une orbite parabolique s'il existe deux points $X, Y \in \partial\mathbb{F}_N$, $X \neq Y$, tels que :

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \partial\varphi^k(Y) = X.$$

En particulier, X est un point fixe de $\partial\varphi$. Dans cette situation, le point $X \in \partial\mathbb{F}_N$ est appelé un *point fixe parabolique* pour φ , et l'ensemble $\{\partial\varphi^k(Y) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est appelé une *orbite parabolique* pour φ .

On montre facilement que les automorphismes géométriques ne peuvent pas avoir d'orbite parabolique. En particulier, les automorphismes de \mathbb{F}_2 n'ont pas d'orbite parabolique. En revanche :

Théorème 2.1 ([Hil11]). *Pour $N \geq 4$ il existe une famille infinie $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ d'automorphismes de \mathbb{F}_N qui ont une orbite parabolique, telle que pour tout $k, k', p, p' \in \mathbb{N}$, φ_k^p et $\varphi_{k'}^{p'}$ sont conjugués si et seulement si $k = k'$ et $p = p'$.*

Je donne maintenant un exemple d'automorphisme de \mathbb{F}_4 qui a une orbite parabolique. Considérons l'automorphisme φ de $\mathbb{F}_4 = \langle a, b, c, d \rangle$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba \\ c &\mapsto ca^2 \\ d &\mapsto dc. \end{aligned}$$

Son inverse est :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba^{-1} \\ c &\mapsto ca^{-2} \\ d &\mapsto da^2c^{-1}. \end{aligned}$$

Itérons φ et φ^{-1} sur bd^{-1} :

$$\begin{aligned} bd^{-1} &\xrightarrow{\varphi} bac^{-1} \cdot d^{-1} \xrightarrow{\varphi} bc^{-1} \cdot c^{-1}d^{-1} \xrightarrow{\varphi} ba^{-1}c^{-1} \cdot a^{-2}c^{-1}c^{-1}d^{-1} \\ &\xrightarrow{\varphi} ba^{-2}c^{-1} \cdot a^{-4}c^{-1}a^{-2}c^{-1}c^{-1}d^{-1} \xrightarrow{\varphi} \dots \\ b \cdot d^{-1} &\xrightarrow{\varphi^{-1}} ba^{-1} \cdot ca^{-2}d^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} ba^{-2} \cdot ca^{-4}ca^{-2}d^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} ba^{-3} \cdot ca^{-6}ca^{-4}ca^{-2}d^{-1} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \dots \end{aligned}$$

On a introduit un symbole \cdot qui “est envoyé sur” le \cdot à chaque itération. Le point important est qu'au niveau du \cdot il n'y a jamais de simplification qui s'opère. On voit alors que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^k(bd^{-1}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi^{-k}(bd^{-1}) = ba^{-\infty}$. On en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^k((bd^{-1})^\infty) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^{-k}((bd^{-1})^\infty) = ba^{-\infty}$. Le point $ba^{-\infty} = ba^{-1}a^{-1}a^{-1}a^{-1} \dots \in \partial\mathbb{F}_4$ est un point fixe parabolique pour φ .

La preuve du Théorème 2.1 est une élaboration (non triviale) de cet exemple. Pour autant que nous sachions, la question suivante reste ouverte :

Question 2.2. *Existe-t-il des automorphismes de \mathbb{F}_3 qui ont une orbite parabolique ?*

3 Stabilisateur d'un point du bord

Etant donné un point $X \in \partial\mathbb{F}_N$, on se demande quels sont les automorphismes $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ tels que X soit point fixe de $\partial\varphi$. On désigne par $\text{Stab}(X)$ le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_N)$. Plus généralement, on peut se demander quels sont les sous-groupes de \mathbb{F}_N que l'on obtient comme stabilisateurs d'un point du bord de \mathbb{F}_N .

Si X est un point fixe attractif d'un automorphisme φ à puissances irréductibles, on représente φ par une application de réseaux ferroviaires $f : G \rightarrow G$ dont la matrice de transition est primitive. Le point X se représente dans G par un rayon dont on contrôle la forme et le comportement lorsqu'on itère f . Cela nous permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1 ([Hil07]). *Soit $X \in \partial\mathbb{F}_N$ un point fixe attractif d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ à puissances irréductibles. Si $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ fixe X , alors l'automorphisme extérieur Ψ défini par ψ stabilise la lamination attractive L_Φ^+ de l'automorphisme extérieur Φ défini par φ .*

En utilisant un théorème de [BFH97b] sur le stabilisateur de L_Φ^+ , on en déduit :

Corollaire 3.2 ([Hil07]). *Soit $X \in \partial\mathbb{F}_N$ un point fixe attractif d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ à puissances irréductibles. Le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est infini cyclique.*

Pour le groupe libre \mathbb{F}_2 de rang 2, en faisant une étude directe, et en utilisant un résultat d'Oleg Bogopolski [Bog00] sur les sous-groupes fixes des automorphismes de \mathbb{F}_2 , on peut donner un résultat plus complet que le Corollaire 3.2 :

Théorème 3.3 ([Hil07]).

- Si $X \in \partial\mathbb{F}_2$ est un point non rationnel, alors le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ est soit trivial, soit infini cyclique.
- A isomorphisme près, les sous-groupes de $\text{Aut}(\mathbb{F}_2)$ qui fixent un élément du bord de \mathbb{F}_2 sont les mêmes que ceux qui fixent un élément de \mathbb{F}_2 (à savoir : \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 , $\langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$, $\langle x, y | x^2 = 1, [x, y^2] = 1 \rangle$, $\langle x, y | xyx = yxy \rangle$).

4 Automorphisme induit dans un quotient de Burnside

4.1 Quelques résultats

Le groupe de Burnside libre $\mathbb{B}_N(p)$ de rang N et d'exposant p est le quotient du groupe libre \mathbb{F}_N par le sous-groupe normal engendré par les puissances p -ièmes des éléments de \mathbb{F}_N :

$$\mathbb{B}_N(p) = \mathbb{F}_N / \mathbb{F}_N^p = \langle a_1, \dots, a_N \mid g^p = 1, \forall g \in \mathbb{F}_N \rangle.$$

Si $u, v \in \mathbb{F}_N$ définissent le même élément de $\mathbb{B}_N(p)$, on note : $u \equiv v$ dans $\mathbb{B}_N(p)$.

Un automorphisme de \mathbb{F}_N induit un automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$. Signalons cependant que l'image de $\text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ dans $\text{Aut}(\mathbb{B}_N(p))$ est un sous-groupe strict.

Le principal résultat que nous obtenons avec Rémi Coulon est le suivant :

Théorème 4.1 ([CH11]). *Soit $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$. Les propositions qui suivent sont équivalentes :*

- (i) φ est à croissance exponentielle ;
- (ii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ est d'ordre infini ;
- (iii) il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > p_0$, p impair, l'automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ est d'ordre infini.

Remarque 4.2. La constante p_0 du Théorème 4.1 n'est pas uniforme. L'automorphisme φ de $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ défini par $\varphi(a) = ab^p$ et $\varphi(b) = b(ab^p)^p$ est à croissance exponentielle si $p \geq 1$, et induit l'identité sur $\mathbb{B}_N(p)$.

Un automorphisme de \mathbb{F}_N est soit à croissance exponentielle, soit à croissance polynomiale. Pour les automorphismes à croissance polynomiale, Rémi Coulon a obtenu le résultat suivant :

Proposition 4.3 (Coulon [Cou11b]). *Si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est à croissance polynomiale, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ est d'ordre fini.*

La preuve de la Proposition 4.3 n'est pas très technique. Elle se fait par récurrence sur le rang N de \mathbb{F}_N , et utilise un résultat de structure pour les automorphismes à croissance polynomiale.

Pour prouver le Théorème 4.1, il reste donc à montrer, l'implication : (i) \Rightarrow (iii). Nous rappelons d'abord un théorème de E. A. Cherepanov, qui constitue en fait un exemple illustrant le Théorème 4.1.

Le taux de croissance exponentielle de l'automorphisme φ est en fait le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La preuve du théorème de Cherepanov repose sur deux ingrédients : un résultat sur la “structure” de la lamination attractive de φ (l'absence de sous-mot qui soit une puissance quatrième) et un critère de non-trivialité d'un mot dans le groupe de Burnside.

$$a \mapsto ab \mapsto aba \mapsto abaab \mapsto abaababa \mapsto abaababaabaab \mapsto abaababaabaababaababa \mapsto \dots$$

On comprend facilement comment généraliser la preuve à une classe plus vaste d'automorphismes. Un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est *positif* s'il existe une base \mathcal{A} de \mathbb{F}_N telle que les images par φ des éléments de \mathcal{A} sont des mots sur l'alphabet \mathcal{A} . Un tel automorphisme se représente toujours comme une application de réseaux ferroviaires de la rose. Si la matrice de transition est primitive, on montre qu'il existe un entier n tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi^k(a)$ ($a \in \mathcal{A}$) ne possède pas de sous mot qui est une puissance n -ième. On utilise alors le critère d'Adian-Novikov pour conclure.

$$\begin{array}{lll} \varphi : & a & \mapsto a \\ & b & \mapsto ba \\ & c & \mapsto cbd \\ & d & \mapsto dcbdd. \end{array}$$
$$c \mapsto cbd \mapsto cbdbadcbd \mapsto cbdbadcbdba^2dcbdcbdbadcbd \mapsto \dots$$

On voit apparaître a^{k-1} comme sous mot de $\varphi^k(c)$: on ne pourra donc pas utiliser le critère d'Adian-Novikov.

Remarquons cependant que l'on peut conclure ici encore que l'automorphisme φ satisfait bien à la conclusion du Théorème 4.1. Il suffit de passer aux quotients de \mathbb{F}_N et $\mathbb{B}_N(p)$ par le sous groupe normal engendré par a , et d'argumenter comme précédemment.

Il existe des automorphismes pour lesquels cette astuce (le passage dans un quotient bien choisi) semble moins facile à mettre en oeuvre. C'est le cas, par exemple, de l'automorphisme de $\mathbb{F}_4 = \langle a, b, c, d \rangle$ défini par

$$\begin{aligned}\varphi : \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba \\ c &\mapsto cb^{-1}abc^{-1}d \\ d &\mapsto d^{-1}cb^{-1}abc^{-1}d.\end{aligned}$$

4.2 Esquisse de la preuve du Théorème 4.1

Pour mener à bien la preuve du Théorème 4.1, nous sommes amenés à donner une version *relative* de la preuve de Cherepanov.

On représente $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ par une application de réseaux ferroviaires relative $f : G \rightarrow G$. Comme φ est à croissance exponentielle, f possède au moins une strate exponentielle. On peut se restreindre à un facteur libre invariant sur lequel f est à croissance exponentielle. On suppose donc que $f : G \rightarrow G$ possède exactement une strate exponentielle, et que c'est la strate la plus haute. On colore les arêtes de cette strate en rouge, et les arêtes des autres strates en jaune.

Les propriétés des applications de réseaux ferroviaires relatives ont pour conséquence que si e est une arête rouge, alors $f(e)$ est un chemin d'arêtes rouges ou jaunes, qui commence et se termine par une arête rouge. On a une décomposition de $f(e)$ en sous-chemins rouges ou jaunes maximaux. L'image (réduite) par f d'un sous-chemin maximal rouge de $f(e)$ est un chemin qui commence et se termine par une arête rouge, et l'image (réduite) par f d'un sous-chemin maximal jaune de $f(e)$ est un sous-chemin maximal jaune de $f^2(e)$. Cela reste vrai pour $f^k(e)$, $k \geq 1$.

Si l'on écrase tous les sous-chemins maximaux jaunes dans $f^k(e)$, on obtient un mot $W(f^k(e))$, non réduit en général, dans l'alphabet formé par les arêtes rouges. La primitivité de la matrice de transition de la strate rouge entraîne qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq 1$, pour toute arête rouge e , le mot $W(f^k(e))$ ne contient pas de sous-mot qui est une puissance p_1 -ième.

Par ailleurs, l'ensemble Γ de tous les sous-chemins maximaux jaunes de $f(e)$, lorsque e décrit toutes les arêtes rouges, est fini. Il existe donc un entier p_2 tel que

pour tout $p > p_2$, les lacets de Γ , vu comme éléments de \mathbb{F}_N , sont non triviaux dans $\mathbb{B}_N(p)$.

On a maintenant besoin d'un critère de non-trivialité d'un mot dans le groupe de Burnside $\mathbb{B}_N(p)$. Soit $w \in \mathbb{F}_N = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$ un mot réduit. Un *mouvement élémentaire* consiste en : si on lit une puissance u^n dans w , avec $n > p/4$, on remplace u^n par u^{p-n} , et on réduit le mot obtenu (p est ici l'exposant de $\mathbb{B}_N(p)$, et n un entier).

Théorème 4.5 (Coulon [Cou11a]). *Soit $p \in \mathbb{N}$ en entier impair. Soit $w \in \mathbb{F}_N = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$ un mot réduit qui est trivial dans le groupe $\mathbb{B}_N(p)$. Alors il existe une suite finie de mouvements élémentaires qui envoie w sur le mot trivial 1.*

Prenons $p > p_1$. Si $e^{-1}f^k(e)$ est trivial dans $\mathbb{B}_N(p)$, les mouvements élémentaires ne peuvent intervenir que dans la partie jaune de $e^{-1}f^k(e)$. Après un mouvement élémentaire, le mot $W(e^{-1}f^k(e))$ reste inchangé, à moins qu'un sous chemin maximal jaune ait été entièrement effacé. Cela n'est pas possible si l'on prend $p > p_2$. En effet, un tel chemin est de la forme $f^q(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma$: s'il était trivial dans $\mathbb{B}_N(p)$, alors γ aussi serait trivial dans $\mathbb{B}_N(p)$, puisque φ est un automorphisme.

Donc l'automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ est d'ordre infini, pour p impair, $p > \max(p_1, p_2)$.

Remarque. Le critère de Coulon (Théorème 4.5) est un résultat subtil, assez technique à démontrer. A notre connaissance, ce critère est nouveau, bien que l'on puisse en trouver une version plus faible dans [Adi79], insuffisante pour mener à bien notre preuve du Théorème 4.1. L'approche de Rémi Coulon est inspirée par les travaux de Thomas Delzant et Misha Gromov sur la courbure mésoscopique. On peut voir ce critère comme une sorte de "semi-algorithme de Dehn" pour les groupes de Burnside libres.

4.3 Questions

Dans un certain sens, le Théorème 4.1, et plus encore sa preuve, indique qu'une part de la structure d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ persiste dans l'automorphisme de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ , pour p impair suffisamment grand. Il est très tentant de se demander jusqu'à quel point on peut garder trace d'éléments caractéristiques de φ dans $\mathbb{B}_N(p)$.

Soit un groupe G de type fini, et soit S un système de générateurs fini. On désigne par $|g|$ la longueur de $g \in G$ pour la métrique des mots.

On définit le *taux de croissance exponentielle* d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(G)$

par :

$$\tau(\varphi) = \sup_{g \in G} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log |\varphi^k(g)|}{k}.$$

A notre connaissance, il n'est pas connu s'il existe des automorphismes de $\mathbb{B}_N(p)$ à croissance exponentielle.

Question 4.6. – *Existe-t-il des automorphismes de $\mathbb{B}_N(p)$ à croissance exponentielle ?*

- *Si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est à croissance exponentielle, existe-t-il $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > p_0$, p impair, l'automorphisme $\widehat{\varphi}_p$ de $\mathbb{B}_N(p)$ induit par φ est à croissance exponentielle ?*
- *Si $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_N)$ est à croissance exponentielle, existe-t-il $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p > p_0$, p impair, $\tau(\widehat{\varphi}_p) = \tau(\varphi)$?*

A ce jour, nous ne savons pas répondre à ces questions. Il semble qu'un critère encore plus fin que celui du Théorème 4.5 soit nécessaire pour pouvoir aborder ces questions.

Moins formellement, il serait très intéressant de comprendre ce qui persiste d'une lamination attractive d'un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ dans les quotients de Burnside. Rappelons que c'est en utilisant ces laminations attractives que Mladen Bestvina, Mark Feighn et Michael Handel démontrent que $\text{Out}(\mathbb{F}_N)$ vérifie l'alternative de Tits [BFH00, BFH05].

5 Fractal de Rauzy pour un automorphisme iwip

Soit $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ un automorphisme extérieur à puissances irréductibles, $T_{\Phi^{-1}}$ son arbre répulsif dans CV_N , et L_{Φ}^+ sa lamination attractive. On pense ici à L_{Φ}^+ comme une lamination symbolique dans une base \mathcal{A} , et on considère le système dynamique (L_{Φ}^+, σ) où σ est le décalage. D'après le Corollaire 4.8 et le Théorème 3.2, on peut interpréter le système d'isométries $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = (K_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ (sur le cœur compact de $T_{\Phi^{-1}}$) comme une représentation géométrique du système dynamique symbolique (L_{Φ}^+, σ) : les trajectoires bi-infinies des points de $K_{\mathcal{A}}$ sous l'action du pseudo-groupe d'isométries partielles \mathcal{A} sont précisément codées symboliquement par les feuilles de L_{Φ}^+ et l'action du pseudo-groupe correspond à l'action du décalage.

En dynamique symbolique, un sous-décalage est un système dynamique (Σ, σ) où Σ est un ensemble fermé, σ -invariant, de mots bi-infinis sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$. Un problème classique en dynamique symbolique consiste à construire une représentation géométrique de (Σ, σ) , c'est à dire un espace X compact, muni

d'une partition en N sous-ensembles étiquetés par les éléments de \mathcal{A} et une application bijective $f : X \rightarrow X$ telle que les codages des orbites des éléments de X sous itération de f soient précisément les éléments de Σ . Précisons que le codage de l'orbite $(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ est le mot bi-infini dont la lettre numéro k est l'étiquette du sous-ensemble de la partition auquel $f^k(x)$ appartient.

Gérard Rauzy donne dans [Rau82] une telle représentation géométrique pour la lamination attractive de l'automorphisme positif de $\mathbb{F}_3 = \langle a, b, c \rangle$ défini par $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ac$, $\varphi(c) = a$. Dans ce cas, l'espace X est un compact fractal du plan \mathbb{R}^2 que l'on appelle *fractal de Rauzy*, et l'application f une translation par morceaux. Cette construction a été généralisée par la suite [CS01] à toute substitution (c'est à dire morphisme du monoïde libre, ou morphisme positif du groupe libre) primitive qui satisfait une certaine condition algébrique : son coefficient de dilatation est un nombre Pisot unitaire – et il existe d'autres généralisations, voir notamment l'article d'Anne Siegel [Sie03]. Rappelons qu'un *nombre Pisot* est un entier algébrique réel strictement supérieur à 1, dont tous les conjugués ont un module strictement inférieur à 1. On obtient, avec Pierre Arnoux, Valérie Berthé et Anne Siegel, le résultat suivant :

Théorème 5.1 ([ABHS06]). *Soit $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_N)$ un automorphisme extérieur à puissances irréductibles dont le coefficient de dilatation λ_Φ est un nombre de Pisot unitaire de degré d . On suppose de plus que Φ satisfait la condition de coïncidence forte. Le système dynamique (L_Φ^+, σ) admet une représentation géométrique (X, f) , où X est un compact fractal de \mathbb{R}^d et f une translation par morceaux.*

Le fractal X s'appelle un fractal de Rauzy de Φ . Je ne vais pas expliciter ici la condition de coïncidence forte, mais simplement mentionner qu'une conjecture qui date d'une trentaine d'années, connue sous le nom de *conjecture Pisot*, énonce que sous les autres hypothèses du Théorème 5.1, la condition de coïncidence forte est automatiquement vérifiée.

Considérons maintenant un exemple. L'automorphisme α de $\mathbb{F}_5 = \langle a, b, c, d, e \rangle$ est défini par :

$$\begin{aligned} \alpha : \quad a &\mapsto ab^{-1} \\ b &\mapsto c \\ c &\mapsto d \\ d &\mapsto e \\ e &\mapsto a. \end{aligned}$$

Cet automorphisme induit en fait une application de réseaux ferroviaires sur la rose. Son coefficient de dilation est le plus petit nombre de Pisot : c'est une racine du polynôme $X^3 - X - 1$. Le fractal de Rauzy associé à α , et l'échange de morceaux donnés par le Théorème 5.1 sont représentés sur la figure 1.

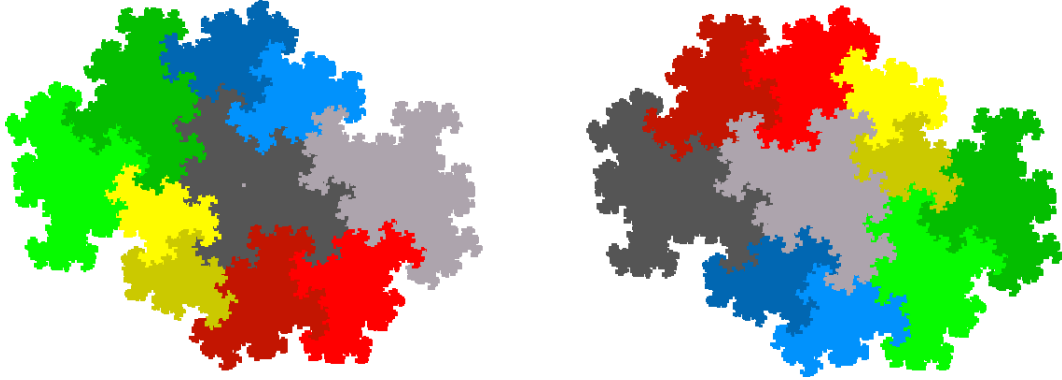


Fig. 1 – *Fractal de Rauzy de l'automorphisme α , et échange de morceaux associé.*

6 Substitutions topologiques et pavages substitutifs du plan

Les pavages substitutifs du plan sont un autre sujet auquel je me suis intéressé. C'est un domaine dans lequel les exemples ont toujours joué un rôle moteur. Le pavage de Penrose est peut-être le plus connu de ces exemples. Le fractal de Rauzy, et ses généralisations, fournissent d'autres exemples. Dans tous les cas, il s'agit de pavages du plan euclidien : on ne connaît pas d'exemple de pavages substitutifs du plan hyperbolique.

Avec Nicolas Bédaride, nous étudions dans [BH11] la question de l'existence de pavages substitutifs du plan hyperbolique. Pour cela, nous introduisons la notion de substitution topologique (en dimension 2). Ces substitutions engendrent des complexes cellulaires homéomorphes au plan. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 6.1 ([BH11]). *Il n'existe pas de pavage primitif substitutif du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .*

L'argument principal de la preuve du Théorème 6.1 repose sur le fait que l'inégalité isopérimétrique est linéaire dans le plan hyperbolique.

De manière plus surprenante, nous donnons un exemple explicite (le premier, à notre connaissance) de pavage substitutif (non primitif) du plan hyperbolique. Ce pavage s'obtient en itérant la substitution topologique définie par la figure 2.

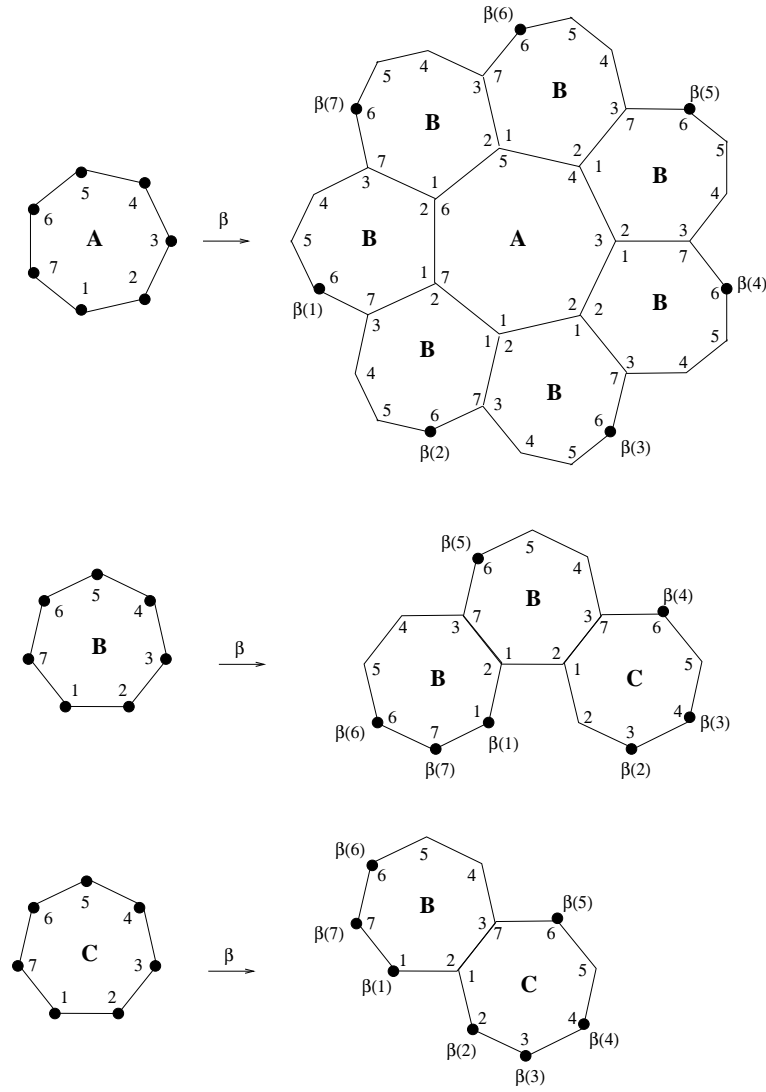


Fig. 2 – Exemple d'une substitution topologique β qui engendre le 2-complexe d'un pavage du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

Bibliographie

- [AB87] Roger Alperin et Hyman Bass, *Length functions of group actions on Λ -trees*, Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 111, 1987, pp. 265–378.
- [ABHS06] Pierre Arnoux, Valérie Berthé, Arnaud Hilion, et Anne Siegel, *Fractal representation of the attractive lamination of an automorphism of the free group*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 7, 2161–2212, Numération, pavages, substitutions.
- [Adi79] S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 95, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Translated from the Russian by John Lennox and James Wiegold.
- [AK08] Yael Algom-Kfir, *Strongly contracting geodesics in outer space*, arXiv :0812.1555, 2008.
- [BDM10] Xavier Bressaud, Fabien Durand, et Alejandro Maass, *On the eigenvalues of finite rank Bratteli-Vershik dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 3, 639–664.
- [Bes02] Mladen Bestvina, *\mathbb{R} -trees in topology, geometry, and group theory*, Handbook of geometric topology, North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 55–91.
- [BF95] Mladen Bestvina et Mark Feighn, *Stable actions of groups on real trees*, Invent. Math. **121** (1995), no. 2, 287–321.

- [BF11] ———, *Hyperbolicity of the complex of free factors*, arXiv :1107.3308, 2011.
- [BFH97a] M. Bestvina, M. Feighn, et M. Handel, *Erratum to : “Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups”* [*Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 2, 215–244], *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 6.
- [BFH97b] ———, *Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups*, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 2, 215–244.
- [BFH00] Mladen Bestvina, Mark Feighn, et Michael Handel, *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. I. Dynamics of exponentially-growing automorphisms*, *Ann. of Math. (2)* **151** (2000), no. 2, 517–623.
- [BFH05] ———, *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$. II. A Kolchin type theorem*, *Ann. of Math. (2)* **161** (2005), no. 1, 1–59.
- [BH92] Mladen Bestvina et Michael Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, *Ann. of Math. (2)* **135** (1992), no. 1, 1–51.
- [BH11] Nicolas Bédaride et Arnaud Hilion, *Geometric realizations of substitutive tilings*, arXiv :1101.3905, 2011.
- [Bog00] O. Bogopolski, *Classification of automorphisms of the free group of rank 2 by ranks of fixed-point subgroups*, *J. Group Theory* **3** (2000), 339–351.
- [CB88] Andrew J. Casson et Steven A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [CH10] Thierry Coulbois et Arnaud Hilion, *Rips induction : Index of the dual lamination of an \mathbb{R} -tree*, arXiv :1002.0972, 2010.
- [CH11] Rémi Coulon et Arnaud Hilion, *Growth and order of automorphisms of free groups and free Burnside groups*, 2011.
- [Che05] E. A. Cherepanov, *Free semigroup in the group of automorphisms of the free Burnside group*, *Comm. Algebra* **33** (2005), no. 2, 539–547.
- [CHL07] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, et Martin Lustig, *Non-unique ergodicity, observers’ topology and the dual algebraic lamination for \mathbb{R} -trees*, *Illinois J. Math.* **51** (2007), no. 3, 897–911.
- [CHL08a] ———, *\mathbb{R} -trees and laminations for free groups. I. Algebraic laminations*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), no. 3, 723–736.
- [CHL08b] ———, *\mathbb{R} -trees and laminations for free groups. II. The dual lamination of an \mathbb{R} -tree*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), no. 3, 737–754.
- [CHL08c] ———, *\mathbb{R} -trees and laminations for free groups. III. Currents and dual \mathbb{R} -tree metrics*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008), no. 3, 755–766.

- [CHL09] ———, *\mathbb{R} -trees, dual laminations and compact systems of partial isometries*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **147** (2009), no. 2, 345–368.
- [CHR11] Thierry Coulbois, Arnaud Hilion, et Patrick Reynolds, *Indecomposable F_N -trees and minimal laminations*, prépublication, 2011.
- [CL95] Marshall M. Cohen et Martin Lustig, *Very small group actions on \mathbf{R} -trees and Dehn twist automorphisms*, Topology **34** (1995), no. 3, 575–617.
- [CM87] Marc Culler et John W. Morgan, *Group actions on \mathbf{R} -trees*, Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), no. 3, 571–604.
- [Coo87] D. Cooper, *Automorphisms of free groups have finitely generated fixed point sets*, J. Algebra **111** (1987), 453–456.
- [Cou11a] Rémi Coulon, *Detecting trivial elements of Burnside groups*, prépublication, 2011.
- [Cou11b] ———, *Outer automorphisms of the free Burnside group*, à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici, 2011.
- [CS01] Vincent Canterini et Anne Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 12, 5121–5144.
- [Fer97] Sébastien Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. **73** (1997), no. 1, 35–65.
- [FH11] Mark Feighn et Michael Handel, *The recognition theorem for $\text{Out}(F_n)$* , Groups Geom. Dyn. **5** (2011), no. 1, 39–106.
- [FJ04] Charles Favre et Mattias Jonsson, *The valuative tree*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [FLP76] A. Fathi, F. Laudenbach, et V. Poenaru (eds.), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66-67, Société Mathématique de France, Paris, 1976.
- [FM11] Stefano Francaviglia et Armando Martino, *Metric properties of outer space*, Publ. Mat. **55** (2011), no. 2, 433–473.
- [Gab96] Damien Gaboriau, *Dynamique des systèmes d’isométries : sur les bouts des orbites*, Invent. Math. **126** (1996), no. 2, 297–318.
- [Gab97] ———, *Générateurs indépendants pour les systèmes d’isométries de dimension un*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 1, 101–122.
- [GJLL98] Damien Gaboriau, Andre Jaeger, Gilbert Levitt, et Martin Lustig, *An index for counting fixed points of automorphisms of free groups*, Duke Math. J. **93** (1998), no. 3, 425–452.

- [GL] Vincent Guirardel et Gilbert Levitt, travail en cours.
- [GL95] Damien Gaboriau et Gilbert Levitt, *The rank of actions on \mathbf{R} -trees*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28** (1995), no. 5, 549–570.
- [GLP94] D. Gaboriau, G. Levitt, et F. Paulin, *Pseudogroups of isometries of \mathbf{R} and Rips' theorem on free actions on \mathbf{R} -trees*, Israel J. Math. **87** (1994), no. 1-3, 403–428.
- [Gui05] Vincent Guirardel, *Cœur et nombre d'intersection pour les actions de groupes sur les arbres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 6, 847–888.
- [Gui08] ———, *Actions of finitely generated groups on \mathbb{R} -trees*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 1, 159–211.
- [Hil04] A. Hilion, *Dynamique des automorphismes des groupes libres*, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier – Toulouse 3, France, décembre 2004.
- [Hil07] Arnaud Hilion, *On the maximal subgroup of automorphisms of a free group F_N which fix a point of the boundary ∂F_N* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), no. 18, Art. ID rnm066, 21.
- [Hil11] ———, *Free group automorphisms with parabolic boundary orbits*, arXiv :1103.6047, 2011.
- [HM06] Michael Handel et Lee Mosher, *Axes in outer space*, arXiv :math/0605355, 2006.
- [HM07] ———, *Parageometric outer automorphisms of free groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 7, 3153–3183 (electronic).
- [HM09] ———, *Subgroup classification in $Out(F_n)$* , arXiv :0908.1255, 2009.
- [Kap01] Michael Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Progress in Mathematics, vol. 183, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.
- [Kap05] Ilya Kapovich, *The frequency space of a free group*, Internat. J. Algebra Comput. **15** (2005), no. 5-6, 939–969.
- [Kap06] ———, *Currents on free groups*, Topological and asymptotic aspects of group theory, Contemp. Math., vol. 394, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 149–176.
- [KL09] Ilya Kapovich et Martin Lustig, *Geometric intersection number and analogues of the curve complex for free groups*, Geom. Topol. **13** (2009), no. 3, 1805–1833.
- [KL10] ———, *Intersection form, laminations and currents on free groups*, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 5, 1426–1467.

- [KL11] ———, *Invariant laminations for irreducible automorphisms of free groups*, arXiv :1104.1265, 2011.
- [KN76] Harvey B. Keynes et Dan Newton, *A “minimal”, non-uniquely ergodic interval exchange transformation*, Math. Z. **148** (1976), no. 2, 101–105.
- [Lev93] Gilbert Levitt, *La dynamique des pseudogroupes de rotations*, Invent. Math. **113** (1993), no. 3, 633–670.
- [Lev94] ———, *Graphs of actions on \mathbf{R} -trees*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 1, 28–38.
- [LL00a] Gilbert Levitt et Martin Lustig, *Most automorphisms of a hyperbolic group have very simple dynamics*, Ann. Sci. ENS **33** (2000), 507–517.
- [LL00b] ———, *Periodic ends, growth rates, Hölder dynamics for automorphisms of free groups*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), 415–429.
- [LL03] ———, *Irreducible automorphisms of F_n have north-south dynamics on compactified outer space*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 59–72.
- [LL04] Jérôme Los et Martin Lustig, *The set of train track representatives of an irreducible free group automorphism is contractible*, prépublication - [http ://www.crm.es/Publications/04/Pr606.pdf](http://www.crm.es/Publications/04/Pr606.pdf), 2004.
- [LL08] Gilbert Levitt et Martin Lustig, *Automorphisms of free groups have asymptotically periodic dynamics*, J. Reine Angew. Math. **619** (2008), 1–36.
- [Lus00] M. Lustig, *Structure and conjugacy for automorphisms of free groups I*, MPI-Preprint Series 130 (2000), 2000.
- [Lus01] ———, *Structure and conjugacy for automorphisms of free groups II*, MPI-Preprint Series 4 (2001), 2001.
- [Lus11] ———, *Better train-tracks*, 2011.
- [Mor88] John W. Morgan, *Ergodic theory and free actions of groups on \mathbf{R} -trees*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 605–622.
- [Mos92] Brigitte Mossé, *Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d’une substitution*, Theoret. Comput. Sci. **99** (1992), no. 2, 327–334.
- [Pau89] Frédéric Paulin, *The Gromov topology on \mathbf{R} -trees*, Topology Appl. **32** (1989), no. 3, 197–221.
- [Rau79] Gérard Rauzy, *Échanges d’intervalles et transformations induites*, Acta Arith. **34** (1979), no. 4, 315–328.
- [Rau82] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), no. 2, 147–178.

- [Rey11] Patrick Reynolds, *On indecomposable trees in the boundary of outer space*, Geom. Dedicata **153** (2011), no. 1, 59–71.
- [Sha87] Peter B. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 265–319.
- [Sie03] Anne Siegel, *Représentation des systèmes dynamiques substitutifs non unimodulaires*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003), no. 4, 1247–1273.
- [Sko96] Richard K. Skora, *Splittings of surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 605–616.
- [Sta83] John R. Stallings, *Topology of finite graphs*, Invent. Math. **71** (1983), no. 3, 551–565.
- [Vee69] William A. Veech, *Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2*, Trans. Amer. Math. Soc. **140** (1969), 1–33.
- [Vee78] ———, *Interval exchange transformations*, J. Analyse Math. **33** (1978), 222–272.
- [Vog02] Karen Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space*, Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000), vol. 94, 2002, pp. 1–31.
- [Yoc09] Jean-Christophe Yoccoz, *Échanges d’intervalles et surfaces de translation*, Astérisque (2009), no. 326, Exp. No. 996, x, 387–409 (2010), Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008.